

Представление отношений толерантности и гранулирование информации в субструктурной логике

Е. С. Волкова¹, В. Б. Гисин²

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Финуниверситет), Financial University

¹evolkova@fa.ru, ²vgisin@fa.ru

Аннотация. В работе изучаются отношения толерантности с оценками в некоммутативной резидуальной решетке. Показано, что для заданного отношения толерантности может быть выявлена система признаков и отношение «объект-признак», так, что объекты оказываются сходными в той мере, в какой обладают общими признаками. Роль признаков играют классы толерантности, описание которых также приведено в работе.

Ключевые слова: отношение толерантности; резидуальная решетка; решетка понятий; субструктурная логика

I. ВВЕДЕНИЕ

Изучение резидуальных решеток началось более полувека назад [14]. Работы Ламбека [8] (см. также [11], [6]) показали, что резидуальные решетки могут быть использованы как логические шкалы для алгебраизации субструктурных логик. В последние два десятилетия развитие компьютерных методов обработки естественного языка послужило дополнительным стимулом дальнейшего изучения субструктурных логик и резидуальных решеток как средства формализации и математического моделирования языковых явлений [7], [10], [5].

Коммутативные резидуальные решетки используются как логические шкалы в теории понятий (см. [4]), при кластеризации и формировании информационных гранул (см. [12], [13]). Центральную роль в этих теориях играют отношения сходства (толерантности) и отношения «объект-признак». В настоящей работе изучаются отношения толерантности, для которых в качестве логической шкалы берется полная некоммутативная резидуальная решетка. Показано, что для каждого такого отношения толерантности может быть построено пространство признаков так, что сходство определяется наличием общих признаков. Ранее подобный результат был известен для случая бинарной логической шкалы [2] (см. также [1], [3]).

II. РЕЗИДУАЛЬНЫЕ РЕШЕТКИ

Алгебра $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, \backslash, /, 1)$ называется резидуальной решеткой, если выполняются следующие условия:

$(A, \wedge, \vee)$ — решетка;

$(A, *, 1)$ — моноид (т.е. умножение ассоциативно и 1 — нейтральный элемент);

$\backslash, /$ — бинарные операции, сопряженные умножению в том смысле, что неравенство $x*y \leq z$ равносильно каждому из неравенств $y \leq x/z$ и $x \leq z/y$.

В дальнейшем мы, как это обычно делается, будем опускать знак умножения и писать вместо $x*y$ просто xy . Если порядок выполнения операций не определен скобками, будем считать, что сначала выполняется умножение, потом операции «деления» и лишь затем решеточные операции. Например, $xy/z \vee x/y$ служит сокращенной записью для $((x*y)/z) \vee (x/y)$. Если из контекста ясно, о каких операциях идет речь, будем обозначать резидуальную решетку $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, \backslash, /, 1)$ через A .

При традиционной трактовке A можно рассматривать как категорию, объектами которой служат элементы множества A , а множество морфизмов из x в y при $x, y \in A$ состоит ровно из одного элемента, если $x \leq y$, и пусто в противном случае. Умножение в резидуальной решетке монотонно, поэтому умножение справа (или слева) на фиксированный элемент $a \in A$ может рассматриваться как функтор. Тогда операции $\backslash$ и $/$ могут трактоваться как сопряженные функторы: $\text{Hom}(ax, y) = \text{Hom}(x, a/y)$ и $\text{Hom}(xa, y) = \text{Hom}(x, y/a)$. Категорная трактовка позволяет перенести свойства сопряженных функторов на свойства операций в резидуальных решетках.

Если в резидуальной решетке $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, \backslash, /, 1)$ выделен элемент 0 (необязательно наименьший элемент решетки), полученная алгебра называется полной алгеброй Ламбека. Резидуальная решетка $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, \backslash, /, 1)$ называется полной и интегральной, если $(A, \wedge, \vee)$ — полная решетка, а 1 является ее наибольшим элементом.

Далее будем предполагать, что $\mathbf{A}$ — полная интегральная резидуальная решетка. Через 0 обозначим ее наименьший элемент.

III. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И СООТВЕТСТВИЯ

Пусть X — непустое множество. Нечеткое множество (или $\mathbf{A}$ -множество) F с носителем X задается отображением множества X в решетку A , которое

называют функцией принадлежности. Чтобы не загромождать обозначений, мы будем отождествлять A -множество с его функцией принадлежности. Для множества всех A -множеств с носителем X будем использовать обозначение A^X . Поточечное определение операций превращает множество A^X в полную резидуальную решетку.

Для отношения порядка и решеточных операций в A^X используются традиционные теоретико-множественные обозначения $\subseteq, \cap, \cup$. Наибольший элемент решетки A^X будем обозначать через Ω , наименьший — через ω . Таким образом, $\Omega(x) = 1$, а $\omega(x) = 0$ для всех $x \in X$. Подмножество W множества X можно считать нечетким множеством, ассоциируя с ним характеристическую функцию: $W(x) = 1$ при $x \in W$ и $W(x) = 0$ при $x \notin W$. Характеристическая функция одноточечного множества $W = \{x\}$ называется синглетоном и будет обозначаться через Δ_x . Очевидно, $\Delta_x * \Delta_x = \Delta_x$ и $\Delta_x * \Delta_y = \omega$ при $x \neq y$.

Нечеткое соответствие из множества X в множество Y задается нечетким подмножеством декартова произведения $X \times Y$. Если $R \in A^{X \times Y}$, через R^{-1} будем обозначать соответствие из Y в X такое, что

$$R^{-1}(y, x) = R(x, y)$$

для любой пары $(x, y) \in X \times Y$. Композиция RS соответствий $R \in A^{X \times Y}$ и $S \in A^{Y \times Z}$ задается формулой

$$RS(x, z) = \sup\{R(x, y) * S(y, z) \mid y \in Y\}.$$

Умножение дистрибутивно относительно взятия верхней грани. С учетом этого несложно показать, что композиция соответствий ассоциативна.

Соответствия $R \in A^{X \times X}$ называют нечеткими бинарными отношениями на множестве X . Нечеткое бинарное отношение R на множестве X называется:

- рефлексивным, если $R(x, x) = 1$ для любого $x \in X$;
- симметричным, если $R = R^{-1}$;
- транзитивным, если $R^2 \subseteq R$ (через R^2 обозначена композиция RR).

Нечеткое бинарное отношение называется:

- отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;
- отношением толерантности, если оно рефлексивно и симметрично.

Представление отношения толерантности T на множестве X в виде $T = SS^{-1}$, где $S \in A^{X \times Y}$, можно трактовать как построение пространства признаков Y и отношения «объект-признак» S , при котором объекты оказываются сходными в той мере, в какой они обладают общими признаками.

IV. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОТНОШЕНИЙ ТОЛЕРАНТНОСТИ

Пусть $T \in A^{X \times X}$ — нечеткое отношение толерантности.

Нечеткое множество $K \in A^X$ будем называть предклассом толерантности, если

$$K(x) * K(y) \leq T(x, y)$$

для любой пары $(x, y) \in X \times X$.

Легко видеть, что Δ_x является предклассом для любого $x \in X$.

Предклассы толерантности упорядочены по включению отношением $\subseteq$. Если I — линейно упорядоченное множество индексов, и $\{K_i\}_{i \in I}$ — упорядоченное по возрастанию семейство предклассов толерантности, то нечеткое множество, заданное уравнением $K(x) = \sup\{K_i(x) \mid i \in I\}$, также является предклассом. В самом деле,

$$K(x) * K(y) = \sup\{K_i(x) * K_j(y) \mid i, j \in I\},$$

поскольку умножение перестановочно с верхней гранью. Для $m = \max\{i, j\}$ имеем

$$K_i(x) * K_j(y) \leq K_m(x) * K_m(y) \leq T(x, y),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Максимальные относительно включения предклассы будем называть классами толерантности. Каждый предкласс содержится в некотором классе толерантности. В частности, это справедливо в отношении любого предкласса вида Δ_x . Если K — класс толерантности, содержащий Δ_x , то $K(x) = 1$. Таким образом, для любого $x \in X$ имеется класс толерантности K такой, что $K(x) = 1$.

Будем называть класс толерантности K регулярным, если $K(x) = 1$ для некоторого $x \in X$. Для любой пары элементов $(x, y) \in X \times X$ имеется регулярный класс толерантности K такой, что $K(x) * K(y) = T(x, y)$. Для доказательства зададим $P \in A^X$, уравнением $P = \Delta_x \cup T(x, y) * \Delta_y$. Имеем $P(x) = 1$, $P(y) = T(x, y)$ и $P(z) = 0$, если $z \notin \{x, y\}$. С учетом этого P является предклассом. Пусть K , содержащий его класс толерантности. Тогда $K(x) = 1$, $K(y) = T(x, y)$ и, значит, класс K обладает требуемыми свойствами.

Обозначим через Y множество всех регулярных классов толерантности. Зададим соответствие $S \in A^{X \times Y}$, полагая $S(x, K) = K(x)$ при $x \in X$, $K \in Y$. Тогда для любой пары $(x, y) \in X \times X$ выполняется неравенство

$$S(x, K) * S(y, K) = K(x) * K(y) \leq T(x, y),$$

каков бы ни был класс $K \in Y$. Но при этом, как было показано выше, найдется класс $K \in Y$ такой, что $S(x, K) = 1$ и $S(y, K) = T(x, y)$. Это означает, что

$$\sup\{S(x, K) * S(y, K) \mid K \in Y\} = T(x, y).$$

Следовательно, $T = SS^{-1}$. Заметим также, что в множестве Y нет «лишних» элементов в том смысле, что

$$S^{-1}S(K, K) = \sup\{S(x, K) * S(x, K) \mid x \in X\} = 1.$$

Таким образом, пространство регулярных классов толерантности Y (с соответствием S) играет роль

пространства признаков, порождающих отношение толерантности T .

V. КЛАССЫ ТОЛЕРАНТНОСТИ

Установим вид классов толерантности.

Неравенство $K(x) * K(y) \leq T(x, y)$ равносильно неравенству $K(x) \leq T(x, y)/K(y)$. Точно так же $K(x) \leq K(y) \setminus T(y, x) = K(y) \setminus T(x, y)$. Следовательно, нечеткое множество $K \in A^X$ является предклассом тогда и только тогда, когда

$$K(x) \leq \inf\{T(x, y)/K(y) \mid y \in X\} \wedge \inf\{K(y) \setminus T(x, y) \mid y \in X\}$$

при всех $x \in X$. Регулярные классы характеризуются тем, что в этом соотношении неравенство заменяется равенством.

Теорема. Нечеткое множество $K \in A^X$ является классом толерантности тогда и только тогда, когда

$$K(x) = \inf\{T(x, y)/K(y) \mid y \in X\} \wedge \inf\{K(y) \setminus T(x, y) \mid y \in X\}$$

при всех $x \in X$.

Доказательство. Покажем сначала достаточность сформулированного условия. Во-первых, из замечания, предшествующего теореме, следует, что K — предкласс. Далее, пусть P — предкласс, содержащий K , т.е. такой, что $K(x) \leq P(x)$ для всех $x \in X$. Тогда $T(x, y)/P(y) \leq T(x, y)/K(y)$ и $P(y) \setminus T(x, y) \leq K(y) \setminus T(x, y)$ для любой пары $(x, y) \in X \times X$. Отсюда следует, что

$$P(x) \leq \inf\{T(x, y)/P(y) \mid y \in X\} \leq \inf\{T(x, y)/K(y) \mid y \in X\},$$

и аналогично $P(x) \leq \inf\{K(y) \setminus T(x, y) \mid y \in X\}$. Но тогда $P(x) \leq K(x)$, и, значит, $P(x) = K(x)$.

Обратно, пусть K — класс толерантности и $z \in X$ — произвольный элемент. Положим

$$a = \inf\{T(z, y)/K(y) \mid y \in X\} \wedge \inf\{K(y) \setminus T(z, y) \mid y \in X\}$$

и покажем, что $K(z) = a$.

Рассмотрим нечеткое множество $P = K \cup a * \Delta_z$. Так как K является предклассом, то $K(z) \leq a$. С учетом этого можно утверждать, что $K \subseteq P$, т.е. $K(x) \leq P(x)$ для любого $x \in X$. Покажем, что P является предклассом. Для этого достаточно установить, что $P(x) * P(y) \leq T(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Если $x, y \neq z$, это следует из того, что $P(x) = K(x)$, $P(y) = K(y)$, а K — предкласс.

Если $x = y = z$, то $T(x, y) = 1$, и неравенство также выполняется. Пусть $x = z$, а $y \neq z$. Имеем:

$$P(z) * P(y) = a * K(y) \leq T(z, y)/K(y) * K(y) \leq T(z, y).$$

Наконец, пусть $x \neq z$, а $y = z$. Тогда

$$P(x) * P(z) = K(x) * a \leq K(x) * K(x) \setminus T(z, x) \leq T(z, x) = T(x, z).$$

Поскольку по предположению K — максимальный предкласс, имеем $P(x) = K(x)$ для всех $x \in X$, и, в частности, $K(z) = a$.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Классы толерантности образуют пространство признаков, которое, вообще говоря, может оказаться избыточным в смысле числа признаков. Описание минимальных наборов классов толерантности (базовых наборов признаков) является задачей дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александрова А.А., Ахтёров А. В., Воронин А. Ю., Кирильченко А.А., Соколов С.М. Основы теоретической робототехники. Теория толерантных пространств (обзор). М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2009. № 45. 25 с.
- [2] Шрейдер Ю.А. Пространства толерантности // Кибернетика. 1970. № 2. с. 124-128.
- [3] Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1974. 254 с.
- [4] Antoni L., Krajči S., Kridlo O. On Fuzzy Generalizations of Concept Lattices. Interactions Between Computational Intelligence and Mathematics. Springer, Cham, 2018. p. 79-103.
- [5] Buszkowski W. Categorical Grammars and Their Logics / The Lvov-Warsaw School. Past and Present. Birkhäuser, Cham, 2018. p. 91-115.
- [6] Casadio C. Semantic categories and the development of categorial grammars / Categorial grammars and natural language structures. Springer, Dordrecht, 1988. p. 95-123.
- [7] Galatos N., P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono, H. Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics. Elsevier, 2007. V. 151. 510 p.
- [8] Lambek J. The mathematics of sentence structure // The American Mathematical Monthly. 1958. V. 65, №. 3. p. 154-170.
- [9] Lambek J. Bilinear logic in algebra and linguistics / Advances in Linear Logic (Girard J.-Y., Lafont Y., Regnier L., eds.). Cambridge Univ. Press, 1995. p. 43-60.
- [10] Moot R., Retoré C. The logic of categorial grammars: a deductive account of natural language syntax and semantics. Springer, 2012. V. 6850. 302 p.
- [11] Morrill G. A chronicle of type logical grammar: 1935–1994 // Research on Language and Computation. 2007. V. 5. №. 3. p. 359-386.
- [12] Pedrycz W. Knowledge-based clustering: from data to information granules. John Wiley & Sons, 2005. 316 p.
- [13] Granular sets—foundations and case study of tolerance spaces / Ślęzak D., Wasilewski P. // International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular-Soft Computing. / Springer, 2007. p. 435-442.
- [14] Ward M., Dilworth R.P. Residuated lattices // Transactions of the American Mathematical Society. 1939. V. 45, №. 3. p. 335-354.