Нечеткие классы толерантности

Е. С. Волкова[1], В. Б. Гисин[2]
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Финуниверситет), Financial University
[1]evolkova@fa.ru, [2]vgisin@fa.ru

***Аннотация*. Для четкого отношения толерантности описано строение нечетких классов толерантности с оценками функции принадлежности в полной гейтинговой алгебре. Показано, что значениями функции принадлежности класса толерантности служат булевы элементы гейтинговой алгебры.**

Ключевые слова: отношение толерантности; класс толерантности; Гейтингова алгебра; булева алгебра

I. Введение

Теория формальных понятий, возникшая в 1980-е годы двадцатого столетия, получила в последние годы новые стимулы для развития в теории информационных гранул [5], [7], [8], [9], в том числе и с использованием неклассической логики [4], [6].

Ключевым в теории формальных понятий является отношение объект-признак. Бинарное отношение $I \subseteq G \times M$ связывает объекты (элементы множества G) с признаками (элементами множества M) и порождает соответствие Галуа между подмножествами множества объектов и подмножествами множества признаков. Формальное понятие определяется как пара множеств $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, замкнутых относительно соответствия Галуа. Отношение I порождает на множестве объектов рефлексивное симметричное отношение толерантности (симметричное рефлексивное отношение), при котором считаются сходными объекты, имеющие общие признаки. При более общем подходе вместо отношения объект-признак может быть указано отношение толерантности (сходства) на множестве объектов G. Зная отношение толерантности, можно определить классы толерантности, совокупность которых играет роль пространства признаков, а отношение принадлежности объекта к классу толерантности — роль отношения объект-признак [1], [3].

В общем виде задачу построения пространства признаков и отношения объект-признак можно сформулировать следующим образом: по отношению толерантности T, заданному на множестве G, требуется построить множество признаков M и соответствие $S \subseteq G \times M$ так, что $T = S \cdot S^{-1}$, где S^{-1} — соответствие, обратное соответствию S, а $\cdot$ обозначает композицию соответствий. В такой постановке задача построения пространства признаков непосредственно переносится в нечеткий контекст. Достаточно считать, что соответствия нечеткие, и композиция определена стандартным образом. Мы будем предполагать, что функции принадлежности принимают свои значения в полной Гейтинговой алгебре L.

II. Нечеткие множества и нечеткие бинарные отношения

Под полной Гейтинговой алгеброй мы понимаем полную решетку с нулем и единицей, в которой дополнительно задана операция импликации, сопряженная к операции нижней грани так, что

$x \le y \to z$ тогда и только тогда, когда $x \wedge y \le z$ для любых $x, y, z \in L$.

Пусть X — некоторое множество. Нечеткое множество A с носителем X задается функцией принадлежности $\mu_A : X \to L$. Более формально говорят об L-нечетких множествах. Мы будем опускать указание L, если из контекста ясно, о какой решетке идет речь. Также для сокращения обозначений мы будем отождествлять нечеткое множество с его функцией принадлежности, и писать $A(x)$ вместо $\mu_A(x)$. Множество всех нечетких подмножеств с носителем X будем обозначать L^X. Поточечное определение операций превращает множество L^X в полную Гейтингову алгебру.

Нечеткое соответствие между множествами X и Y задается нечетким множеством R с носителем $X \times Y$. Если $R(x, y) \in \{0, 1\}$ для всех $x, y \in X$, будем называть соответствие R четким. Обратное к R соответствие R^{-1} — это соответствие с носителем $Y \times X$, задаваемое равенством $R^{-1}(x, y) = R(x, y)$ при всех $x \in X$, $y \in Y$. Если $R \in L^{X \times Y}$, $S \in L^{Y \times Z}$ — соответствия, то их композиция — это соответствие $Q \in L^{X \times Z}$ такое, что

$$Q(x, z) = \vee\{R(x, y) \wedge S(y, z) \mid y \in Y\}$$

для всех $x \in X$, $z \in Z$.

Нечеткое соответствие с носителем $X \times X$ называется нечетким бинарным отношением на X. Нечеткое бинарное отношение R на множестве X называется: рефлексивным, если $R(x, x) = 1$ для всех $x \in X$; симметричным, если $R(x, y) = R(y, x)$ для всех $x, y \in X$; транзитивным, если $R(x, y) \wedge R(y, z) \le R(x, z)$ для всех $x, y, z \in X$. Рефлексивное и симметричное нечеткое отношение называется нечетким отношением толерантности. Транзитивное нечеткое отношение толерантности называется нечетким отношением эквивалентности.

III. Классы толерантности

Пусть $T \in L^{X \times X}$ — нечеткое отношение толерантности. Нечеткое множество K с носителем X называется предклассом толерантности, если $K(x) \wedge K(y) \leq T(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Предкласс, максимальный среди предклассов относительно порядка в L^X, называется классом толерантности. В [2] показано, что нечеткое множество K с носителем X является классом толерантности тогда и только тогда, когда $K(x) = \wedge\{K(y) \to T(x, y) \mid y \in X\}$ для всех $x \in X$.

Опишем строение нечеткого класса толерантности K в случае, когда отношение толерантности T четкое, а множество X конечное. Для $a \in L$ положим $a^* = a \to 0$. Так как $K(y) \to 1 = 1$, то

$$K(x) = \wedge\{K(y)^* \mid y \in X, T(x, y) = 0\} \qquad (1)$$

для всех $x \in X$. Множество $B(L) = \{a^* \mid a \in L\}$ является булевой решеткой относительно упорядочения, индуцированного из решетки L. Таким образом, K является $B(L)$-нечетким множеством с носителем X.

Пусть

$$C = < K(x) \mid x \in X > —$$

булева алгебра, порожденная значениями функции принадлежности класса толерантности K. Обозначим через B_n свободную булеву алгебру, порожденную $n = |X|$ элементами, а через I — идеал этой алгебры, порожденный тождествами (1). Тогда булева алгебра C изоморфна факторалгебре булевой алгебры B_n / I.

Пример. Пусть $X = \{x, y, z, t\}$, а отношение толерантности T таково, что

$$T(x, y) = 1,\ T(y, z) = 1,\ T(x, t) = 1;$$

$$T(v, v) = 1 \text{ и } T(u, v) = T(v, u) \text{ для всех } u, v \in X$$

(остальные элементы отношением толерантности не связаны).

Пусть K — класс толерантности, $a, b, c, d \in L$, и

$$K(x) = a,\ K(y) = b,\ K(z) = c,\ K(t) = d.$$

Тогда

$$a = c^*;\ b = d^*;\ \ c = a^* \wedge d^*;\ d = b^* \wedge c^*.$$

Эта система уравнений равносильна системе уравнений

$$a \wedge b^* = b^*;\ c = a^*;\ d = b^*.$$

Факторалгебра свободной булевой алгебры, порожденной элементами a и b, по соотношению $a \wedge b^* = b^*$ изоморфна булевой алгебре $\{0, 1\}^3$. При этом можно выбрать изоморфизм так, что элементу a соответствует $(1, 1, 0)$, элементу b — $(0, 1, 1)$. Таким образом, булева алгебра, порожденная в решетке L элементами a, b, c, d изоморфна факторалгебре булевой алгебры $\{0, 1\}^3$.

При $\dim C = 1$ имеется три четких класса толерантности:

$$K_1(x) = K_1(t) = 1,\ K_1(y) = K_1(z) = 0;$$

$$K_2(x) = K_2(y) = 1,\ K_2(z) = K_2(t) = 0;$$

$$K_3(y) = K_3(z) = 1,\ K_3(x) = K_3(t) = 0.$$

При $\dim C = 2$ также получаем три класса толерантности:

$$K_4(x) = 1,\ K_4(y) = u,\ K_4(z) = 0,\ K_4(t) = u^*;$$

$$K_5(x) = u,\ K_5(y) = 1,\ K_5(z) = u^*,\ K_5(t) = 0;$$

$$K_6(x) = u,\ K_6(y) = u^*,\ K_6(z) = u^*,\ K_6(t) = u,$$

где u — некоторый булев элемент решетки L, отличный от нуля и единицы.

Наконец при $\dim C = 3$ имеется единственный класс толерантности:

$$K_7(x) = u,\ K_7(y) = v,\ K_7(z) = u^*,\ K_7(t) = v^*,$$

где u, v — два булевых элемента решетки L, отличных от нуля и единицы, причем $u \wedge v > 0$ и $u \vee v = 1$.

Классы толерантности играют роль признаков. Таким образом, заданное четкое отношение толерантности определяет семь признаков: три четких признака и четыре нечетких.

IV. Заключение

Известно, что четкое отношение толерантности может быть представлено как отношение сходства, связанное с отношением объект-признак. В работе показано, что признаки могут быть и нечеткими. В случае, когда логической шкалой является гейтингова алгебра, описано строение пространства нечетких признаков. Доказано, что значения функции принадлежности нечетких признаков порождают булеву алгебру, определяемую конечной системой уравнений в случае конечного базового множества. Предложенный подход позволяет выделять нечеткие признаки сходства, связанные с четким отношением толерантности. Нечеткие признаки сходства несут альтернативную информацию о связи объектов.

Список литературы

[1] Александрова А.А., Ахтёров А. В., Воронин А. Ю., Кирильченко А. А., Соколов С. М. Основы теоретической робототехники. Теория толерантных пространств (обзор) / М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2009. № 45. 25 с.

[2] Волкова Е.С., Гисин В.Б. Нечеткие отношения толерантности с оценками в резидуальных решетках // Мягкие измерения и вычисления. 2018. № 11(12). с. 40-47.

[3] Шрейдер Ю.А. Пространства толерантности // Кибернетика. 1970. № 2. с. 124-128.

[4] Antoni, L., Kraiči, S., Krídlo O. On Fuzzy Generalizations of Concept Lattices / Interactions Between Computational Intelligence and Mathematics. Springer, Cham, 2018. p. 79-103.

[5] Belohlavek, R. Similarity relations in concept lattices // Journal of Logic and Computation. 2000. v. 10. N 6. p. 823-845.

[6] Bělohlávek, R., Funioková, T. Similarity and fuzzy tolerance spaces // Journal of Logic and Computation. 2004. v. 14. N 6. p. 827-855.

[7] Ganter, B., Obiedkov, S. Conceptual exploration / Heidelberg: Springer, 2016. 315 p.

[8] Ganter, B., Wille, R. Formal concept analysis: mathematical foundations. Springer, 1999. 284 p.

[9] Pedrycz, W. Knowledge-based clustering: from data to information granules. John Wiley & Sons, 2005. 316 p.