Метод байесовских сетей и ключевые аспекты байесовского моделирования

Л. С. Звягин
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Финуниверситет), Financial University
lszvyagin@fa.ru

Аннотация. **Главным отличием байесовской методологии от различных других подходов является то, что исследователь еще до получения необходимых данных определяет уровень доверия к возможным моделям и затем представляет эту модель в виде определенных вероятностей. Далее, используя теорему Байеса, исследователь находит еще одну совокупность вероятностей, являющихся пересмотренными уровнями доверия к возможным моделям, при этом учитывая новую полученную исследователем информацию.**

Ключевые слова: байесовский подход; оценка достоверности; апостериорное распределение; метод байесовских сетей

Введение

Теорема Байеса (формула Байеса) – одна из главных теорем элементарной теории вероятностей, позволяющей определить вероятность того или иного события при условии, что произошло другое событие, статистически взаимозависимое с ним. Иными словами, формула Байеса дает возможность более точно пересчитать вероятность посредством взятия в расчет не только уже известной информации, но и новой, полученной в ходе наблюдений. Формула Байеса выводится из главных аксиом теории вероятностей, конкретно из условной вероятности. Отличительная особенность формулы Байеса: в ее практическом применении нет необходимости делать большое количество расчетов и различных вычислений. По этой причине байесовские оценки активно стали применяться лишь только после революции в сетевых и компьютерных технологиях.

I. Понятие и основные особенности байесовского подхода

Теорему Байеса разработал Томас Байес (1702–1761 гг.), в честь которого и была названа теорема. Т. Байес – английский математик, который первый предложил применение созданной им теоремы для корректировки убеждений при опоре на свежеполученную информацию. Сущность байесовской парадигмы: если исследователь находит новую информацию, то появляется основа для измерения вероятностей, обусловленных связанными друг с другом событиями.

При подробном изучении сложных социально-экономических систем, в которых обязателен учёт высокой степени неопределённости, байесовский подход является весьма актуальным и перспективным. На его основе разработан математический аппарат, который позволяет сочетать уже имеющиеся априорные представления об объекте с выборочной информацией. В итоге исследователь располагает апостериорной функцией плотности распределения вероятностей, которая относится к параметру или же к проверяемым гипотезам. Кроме того, в условиях ничем неограниченного возрастания объёма выборки байесовские оценки совпадают с классическими оценками.

Применение байесовской теоремы имеет предпосылки, главной из которых является существование определенных соотношений между вероятностями тех явлений, которые имеют неодинаковый характер и спецификации на необходимом уровне любого явления.

Следует выделить некоторые особенности теоремы Байеса:

- абсолютно все параметры и величины считают случайными. Конкретное значение тех или иных параметров неизвестно исследователю; это означает, что параметры случайны с точки зрения незнания исследователя;
- применяется и при нулевом объеме выборки. В таком случае значения апостериорного и априорного распределений равны;
- чтобы оценить неизвестные переменные, применяют апостериорные распределения: поиск решения задачи по оцениванию определенной величины – определение апостериорного распределения данной величины;
- главный инструмент подхода – формула Байеса, правила sum – rule (если A1, …, Ak – события, исключающие друг друга, то одно из них всегда происходит) и product – rule (всякую совместную плотность можно всегда разбить на множители).

Формула Байеса выглядит следующим образом:

$$P_A\,(H_{i)} = \frac{P\,(H_{i)} * P_{Hi}\,(A)}{\sum_{i=1}^{n} P\,(H_{i)} * P_{Hi}\,(A)}$$

где $P\,(H_{i)}$ – вероятности до опытных гипотез, другими словами, априорные вероятности; $P_{Hi}\,(A)$ – условные вероятности при выборе i-й гипотезы возникновения события A; $P_A\,(H_{i)}$ – условная вероятность i-й гипотезы после возникновения события А, иными ловами, апостериорная вероятность.

Благодаря теореме Байеса становится возможным изменение значения вероятности, основанного на более поздних полученных сведениях. Общее толкование байесовского подхода выглядит следующим образом: допустим, что вначале реорганизации конкретного объекта есть n гипотез H1, H2, …, Hn о его различных возможных состояниях. Основываясь на статистических данных прошлых лет, можно обозначить им априорные вероятности P(H1), P(H2), …, P(Hn). Далее наступает эксперимент, от результата которого зависит: наступит или не наступит событие А. Затем определяют условные вероятности возникновения события А при выборе i-й гипотезы P_{Hi} (A) как частоты наблюдения события А. Если событие А наступает, то происходит переоценка каждой гипотезы с помощью замены вероятностей $P\ (H_{i)}$ на вероятности $P_A\ (H_{i)}$.

Обязательно нужно помнить о том, что если статистические данные о начальных вероятностях наблюдений или гипотез о возникновении события А отсутствуют, то байесовскую методологию невозможно применить: подобная «формализация» теряет всякий физический смысл.

Схема теоремы Байеса включает в себя пять компонентов. Она выглядит следующим образом:

1. Априорные сведения о параметре θ.
2. Изначальные статистические данные.
3. Функция правдоподобия $L(X1, \dots, Xn|\theta)$.
4. Нахождение апостериорного распределения $p(\theta|X1, \dots, Xn)$.
5. Построение байесовских точечных и интервальных оценок.

Априорные данные о параметре θ берут основание в предыстории функционирования изучаемого процесса, а также на профессиональных теоретических соображениях о его специфике, особенностях и сущности. Априорные сведения представлены функцией $p(\theta)$, которая задает априорное распределение параметра.

Изначальные статистические данные $X1, \dots, Xn$ формируются в соответствии с функцией распределения $F(x|\theta)$. Допустим, $f(x|\theta)$ – плотность распределения исследуемой случайной величины ξ, если ξ является непрерывной величиной, или вероятность $P\{\xi = \Theta X|\}$, если ξ является дискретной величиной, учитывая, что значение необходимого параметра равно θ.

Функция правдоподобия $L(X1, \dots, Xn|\theta)$ имеющихся данных. Она определяется соотношением:

$$L(X1, \dots, Xn|\theta) = f(X1|\theta) * f(X2|\theta) * \dots * f(Xn|\theta)$$

Апостериорное распределение $\tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n)$ находится по формуле Байеса при условиях, что Ai – событие, которое заключается в том, что оцениваемый параметр равен θ, а роль события В заключается в закреплении $\boldsymbol{n}$ наблюдений на некоторых уровнях $X1, \dots, Xn$.

$$\tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n) = \frac{p(\theta) * L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\int L(X_1, \dots, X_n|\theta) * p(\theta) d\theta}$$

Последним компонентом в логической схеме Байеса является построение байесовских точечных и интервальных оценок, основывающееся на использовании знания об апостериорном распределении $\tilde{p}(\theta|X1, \dots, Xn)$. В качестве байесовских точечных оценок $\hat{\theta}^B$ берут среднее или модальное значение распределения $\tilde{p}$:

$$\hat{\theta}^B_{mean} = E(\theta|X_1, \dots, X_n) = \int \theta * \tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n) d\,\theta$$

$$\hat{\theta}^B_{mod} = \arg\max_{\theta} \tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n)$$

Чтобы определить общий вид апостериорной плотности $p\,\tilde{}(\theta|\ X1, \dots, Xn)$,необходимо знать только числитель правой части: знаменатель не зависит от неизвестного параметра θ.

Если качество оценки измерять с помощью апостериорного байесовского риска, то оценка Байеса будет являться наилучшей в данном случае:

$$R_B\ (X_1, \dots, X_n) = E\{(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta)^2 | X[n]\} = \int (\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta)^2 * \tilde{p}(\theta|X[n]\,) d\theta$$

Чтобы построить байесовский доверительный интервал для параметра θ, обязательно производится вычисление апостериорного закона распределения параметра θ по формуле:

$$\tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n) = \frac{p(\theta) * L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\int L(X_1, \dots, X_n|\theta) * p(\theta) d\theta}$$

Далее по заданной доверительной вероятности P_0 необходимо определить:

$100\,\frac{1+P0}{2}$ и $100\,\frac{1-P0}{2}$ – процентные точки данного закона, соответственно дающие правый и левый концы интервальной оценки.

II. Применение Байесовского подхода

Начиная с 1990 г. стало наблюдаться возрождение методологии Байеса. Байесовские методы оказались эффективными для нахождения решений различных и весьма серьезных задач в сфере статистики и машинного обучения.

Для использования теоремы Байеса в экспертных системах нужно рассмотреть расширенный вид формулы Байеса, который учитывает какое-либо событие E, связанное с другими событиями H1, H2,...,Hn. Если какое-то из событий H1, H2,...,Hn уже наступило, то вероятности события E известны: $P(E/H1), P(E/H2), \dots, P(E/Hn)$.

Допустим, событие E произошло. В таком случае вероятность наступления какого-либо из событий Hi (i=1,...,n) находится по данной формуле:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i) * P(H_i)}{P(E|H_1) * P(H_1) + P(E|H_2) * P(H_2) + \cdots + P(E|H_n) * P(H_n)} = \frac{P(EH_i)}{P(E)}$$

События H1, H2,...,Hn являются гипотезами, а событие E является свидетельством. Вероятности гипотез $P(Hi)$, не учитывая, произошло ли событие E, являются априорными (доопытными), а вероятности гипотез $\mathrm{P(H_i|E)}$ – апостериорными (послеопытными). Величина $\mathrm{P(E|H_i)}$ является совокупной вероятностью событий E и Hi. Полная вероятность события E – величина $P(E)$.

В экспертных системах теорема Байеса применяется для того, чтобы произвести оценку вероятностей заключений правил, основанных на данных о достоверности их посылок. Выводы в таком случае соответствуют приводимым гипотезам в байесовской теореме, а посылки соответствуют свидетельствам. В экспертных системах посылка правила содержит ряд условий: вероятности $P(Hi)$ и $P(E/Hi)$ основываются на статистических данных с применением формул, использующихся в теории вероятностей.

Примером может служить экспертная система, помогающая в оценке условий труда рабочих в конкретной организации. В данной таблице (таблица 1) представлены сведения о 5 тысячах рабочих (у 315 найдено заболевание, которое появилось в процессе их профессиональной деятельности):

ТАБЛИЦА I ОЦЕНКА ДОСТОВЕРНОСТИ ГИПОТЕЗЫ

Условие	Значение	Количество ситуаций обнаружения профессиональных заболеваний	Количество работников, не имеющих профессиональных заболеваний
Контакт с вредными веществами	Постоянно	262	237
	Часто	37	517
	Периодически	14	1011
	Отсутствует	2	2920
Физические нагрузки	Большие	168	927
	Средние	111	1847
	Нет	36	1911
Нервное напряжение	Наличие	202	1532
	Отсутствие	113	3153
Общие заболевания	Присутствуют	196	2011
	Отсутствуют	119	2674

Нужно оценить вероятность появления болезни у рабочего, который при выполнении своей работы взаимодействует с вредными веществами. Кроме того, нужно учесть, что деятельность работника непосредственно связана со средним уровнем физических нагрузок, нервное напряжение у рабочего отсутствует, не имеется общих заболеваний.

В таблице, изображенной выше, за гипотезы принимается уровень состояния здоровья рабочих: где H1 – наличие профессиональной болезни, H2 – отсутствие профессиональной болезни. Свидетельством является совокупность четырех факторов, которые описывают работу: наличие контакта с веществами, вредными для здоровья, физические нагрузки, присутствие общих заболеваний и нервного напряжения (свидетельства E1, E2, E3, E4). За событие E берется совокупность всех четырех факторов.

По формуле Байеса определяются вероятности, необходимые для следующих расчетов. Начальные вероятности гипотез (вероятности обнаружения профессиональных заболеваний и их отсутствие, не учитывая рабочие условия):

$$P(H1) = 315/5000 = 0{,}063;$$
$$P(H2) = 120/173 = 0{,}937.$$

Свидетельством выступает совокупность четырех событий, наблюдаемых одновременно: частый контакт с опасными для здоровья веществами, средний уровень физической нагрузки, отсутствие общих заболеваний и нервного напряжения. Далее определяют условные вероятности свидетельства посредством формулы произведения вероятностей, при условии, что эти события независимы:

$$\mathrm{P(E|H_i)} = \mathrm{P((E_1, E_2, E_3)|H_i)} = \mathrm{P(E_1|H_i) * P(E_2|H_i) * P(E_3|H_i), i} = 1{,}2.$$

Определяются величины, необходимые для последующего применения формулы произведения вероятностей: $P(E1/H1) = 37/315 = 0{,}117;$

$$P(E2/H1) = 111/315 = 0{,}352;$$
$$P(E3/H1) = 113/315 = 0{,}359;$$
$$P(E4/H1) = 119/315 = 0{,}378;$$
$$P(E1/H2) = 517/4685 = 0{,}11;$$
$$P(E2/H2) = 1847/4685 = 0{,}394;$$
$$P(E3/H2) = 3153/4685 = 0{,}673;$$
$$P(E4/H2) = 2674/4685 = 0{,}571.$$

$P(E1/H1)$ – вероятность, показывающая то, что сотрудник часто контактирует с опасными для здоровья веществами, при условии, что в дальнейшем у него появится профессиональное заболевание. Найденная величина показывает частоту обнаружения профессиональных заболеваний у сотрудников, часто контактирующих с вредными веществами.

Затем нужно подставить полученные величины в формулу произведения вероятностей:

$$P(E/H1) = 0{,}117 \cdot 0{,}352 \cdot 0{,}359 \cdot 0{,}378 = 0{,}006;$$
$$P(E/H2) = 0{,}11 \cdot 0{,}394 \cdot 0{,}673 \cdot 0{,}571 = 0{,}017.$$

$P(E/H1)$ – величина, которая показывает вероятность рабочих условий, учитывая, что в дальнейшем у работника появится профессиональное заболевание. Далее определяют послеопытную вероятность нахождения профессионального заболевания при фактических рабочих условиях рассматриваемого случая:

$$\mathrm{P(H_i|E)} = \frac{\mathrm{P(E|H_1) * P(H_1)}}{\mathrm{P(E|H_1) * P(H_1) + P(E|H_2) * P(H_2)}} = \frac{0.006 * 0.063}{0.006 * 0.063 + 0.017 * 0.937} = 0.022$$

Данная апостериорная вероятность является наиболее точной оценкой вероятности нахождения у работника профессионального заболевания, нежели априорная вероятность $P(H1)$, полученная без учета рабочих условий. Необходимо отметить, что рассчитанная апостериорная вероятность меньше, чем априорная вероятность. А это значит, что изучаемые свидетельства (частый контакт с опасными веществами, отсутствие нервного напряжения и общих заболеваний, средний уровень физической нагрузки) полностью подтверждают гипотезу, которая утверждает, что у сотрудника не появится профессиональное заболевание.

III. Метод байесовских сетей (байесовское моделирование)

Байесовские сети – графические структуры, служащие для изображения вероятностных отношений между значительным числом переменных, и структуры, которые необходимы, чтобы осуществить вероятностный вывод, основываясь на представленных переменных.

Тождественным наименованием метода байесовских сетей является понятие «байесовская классификация». Первоначально байесовская классификация использовалась в экспертных системах для формализации знаний. В современном мире байесовская классификация применяется в качестве одного из методов Data Mining. Data Mining обозначает нахождение данных, их глубинный анализ. Data Mining используется и для обозначения системы методов нахождения в статистических данных практически полезных знаний, неизвестных ранее, необходимых для принятия решений в разных сферах деятельности людей.

Наиболее простой вариант метода, который использует байесовскую классификацию, есть «наивная» классификация или наивно-байесовский подход. С помощью этого подхода решаются многие задачи классификации. «Наивная» классификация довольно проста для понимания методом классификации. Наименование «наивная» происходит из предположения о независимости признаков друг от друга. «Наивная» классификация обладает следующими основными свойствами:

- использование всех переменных и нахождение абсолютно всех связей между этими переменными;
- касаемо переменных, есть два предположения:

1) все переменные одинаковы по значимости;
2) все переменные статистически независимы.

Сети Байеса находят свое применение в разных областях: моделировании изображений, медицинской диагностике, генетике, экономике, распознавании речи, исследовании космоса и в современных поисковых системах. Сети Байеса могут быть востребованы в любой области, где потребуется установление неизвестных переменных с помощью использования структурных связей и данных.

Так, сети Байеса могут быть использованы для исследования причинных связей и прогнозирования каких-либо последствий вмешательства в систему.

Байесовская классификация в начале XXI в. была использована для персональной фильтрации спама. Создателем первого фильтра является Пол Грэм. Для корректной работы алгоритма нужно, чтобы выполнялись следующие требования:

1) классифицируемый объект должен иметь достаточное количество признаков. Этому условию удовлетворяют все слова большинства писем пользователя, кроме совсем коротких и редко использующихся;

2) постоянное пополнение набора «спам – не спам». Это условие работает корректно в локальных почтовых клиентах, потому что поток «не спама» у конечного клиента чаще всего является постоянным, а если и присутствуют изменения, то они происходят не стремительно. Но все клиенты сервера по-разному определяют поток «не спама», ведь одно и то же письмо может выступать для одного из них спамом, а для другого оно может не являться спамом. Учитывая это обстоятельство, качество классификации в таких случаях фильтрации писем весьма понижается.

IV. Преимущества и недостатки байесовского подхода и байесовских сетей

Главное преимущество байесовского подхода – применение любой априорной информации относительно модельных параметров. Данная информация выражена априорной вероятностью или функцией плотности вероятности. Далее начальные вероятности «пересматриваются» с использованием выборочных данных, отображающихся в виде апостериорного распределения оценок параметров или переменных модели.

Иные преимущества байесовского подхода:

- для использования метода достаточно знания априорной информации;
- логически выведенные утверждения легки для понимания;
- метод предоставляет собой способ использования субъективных вероятностных оценок.

Недостатки байесовского подхода:

- определение всех взаимодействий в сетях Байеса для сложных систем не всегда выполнимо;
- подход Байеса требует знания множества условных вероятностей, которые обычно получают экспертными методами. Применение программного обеспечения основано на экспертных оценках.

Преимущества сетей Байеса:

- связи в модели устанавливаются между всеми переменными. Благодаря этому предоставляется возможность легко обрабатывать те случаи, в которых отсутствуют значения тех или иных параметров;

- сети Байеса довольно легки в понимании. Они дают возможность проведения анализа по сценарию «что, если» при прогностическом моделировании;
- байесовские сети могут совмещать закономерности, выведенные из статистических данных, и знания экспертов, полученные фактическим путем;
- практическое применение байесовских сетей помогает избежать излишнего усложнения модели.

Недостатки байесовских сетей:

- перемножать условные вероятности нужно только в том случае, если все входные переменные действительно независимы статистически;
- непосредственная обработка непрерывных переменных невозможна: их необходимо преобразовать в интервальную шкалу, чтобы атрибуты стали дискретными; но данные преобразования могут привести к утрате значимых закономерностей;
- в наивно-байесовском подходе на результат классификации не влияет комбинированное значение пар разных атрибутов. Влияние оказывают только лишь индивидуальные значения входных переменных.

V. Заключение

В настоящее время байесовский подход, несмотря на некоторые свои недостатки, широко применяется в современном анализе. Он дает возможность работы с вероятностными распределениями, способствует использованию аналитиком различных априорных знаний относительно оценок параметров модели. Из этого следует, что у аналитика появляется больше возможностей для точного исследования необходимой ему модели, так как байесовский подход несложен для понимания и в то же время эффективен для успешного осуществления цели исследователя, для прогрессивной работы аналитика.

Список литературы

[1] Айвазян С.А.Байесовский подход в эконометрическом анализе // Прикладная эконометрика, 2008, № 1(9), стр. 93–108.

[2] Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И. «Метод потенциальных функций в теории обучения машин». Наука, 1970.

[3] Ветров Д.П., Кропотов Д.А. «Алгоритмы выбора моделей и синтеза коллективных решений в задачах классификации, основанные на принципе устойчивости». УРСС, 2006.

[4] Прокопчина С.В., Федичкин А.И. Применение байесовских интеллектуальных технологий (БИТ) для оценки интегральных показателей // Сб. докл. Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям SCM-2006, 27-29 июня 2006, с. 20-22.

[5] Прокопчина С.В. О подходе к измерению показателей социогуманитарных потенциалов с использованием байесовских интеллектуальных технологий // Государственный аудит. Право. Экономика. 2013. №3. С. 73-82.

[6] D. MacKay Information Theory, Inference, and Learning Algorithms Cambridge University Press, 2003.