Этап дефаззификации нечеткого вывода: традиционный и байесовский логико-вероятностный подходы

Д. П. Бураков
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
burakovdmitry8@gmail.com

***Аннотация*. В докладе обсуждается способ реализации этапа дефаззификации в рамках байесовской логико-вероятностной модели нечеткого вывода. При дефаззификации используется апостериорное распределение вероятностей на множестве гипотез, соответствующих значениям выходной лингвистической переменной. Показана на примерах применимость нового байесовского логико-вероятностного подхода. Выявляются и уточняются его особенности в сравнении с традиционно используемыми методами дефаззификации.**

Ключевые слова: нечеткий вывод; лингвистическая переменная; байесовская логико-вероятностная модель; байесовский логико-вероятностный подход; этап дефаззификации; методы дефаззификации

I. Введение

При решении одного и того же класса задач оценивания в условиях неполноты информации могут применяться как нечеткий логический вывод, так и байесовский подход [1 – 4].

В работе Г. И. Кожомбердиевой «Байесовская логико-вероятностная модель нечеткого вывода», представленной в данном сборнике, предложен новый способ нечеткого логического вывода, базирующийся на замене системы нечетких продукций, используемых при нечетком выводе, на систему условных вероятностей, трактуемых как уверенности в истинности соответствующих байесовских гипотез о том, что выходная переменная принимает то или иное значение при условии наличия свидетельств (посылок соответствующих нечетких продукций).

Дефаззификация применяется на завершающем этапе работы механизма нечеткого вывода [5 – 7]. Суть этого этапа заключается в нахождении элемента носителя Y нечетких множеств, являющихся термами выходной лингвистической переменной $\tilde{Y}$, соответствующего некоторому результирующему терму этой переменной, полученному в процессе нечеткого вывода.

Полученное на выходе системы нечеткого вывода четкое значение y^* используется как выходное воздействие системы управления на объект управления [7].

В данной работе предлагается способ дефаззификации выходного значения системы нечеткого логического вывода, базирующегося на байесовском логико-вероятностном подходе. В результате применения этого подхода в процессе логического вывода на множестве термов $T(\tilde{Y}) = \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ выходной лингвистической переменной $\tilde{Y}$ формируется апостериорное распределение вероятностей $\{P(T_i \mid e)\}$, $i = \overline{1, N}$, характеризующее уверенность в том, что эта переменная принимает каждое значение из своего терм-множества.

Производится сравнение результатов дефаззификации предложенного подхода к нечеткому выводу и результатами дефаззификации, получаемыми при решении задачи нечеткого логического вывода традиционным способом (с использованием алгоритма нечеткого вывода Мамдани [6]).

II. Подход к дефаззификации в байесовском логико-вероятностном нечетком выводе

Предположим, что выходная лингвистическая переменная $\tilde{Y}$ имеет терм-множество $T(\tilde{Y}) = \{T_1, T_2, ..., T_N\}$, определенное на общем для всех термов носителе $Y = [y_{\min}; y_{\max}] \subset \boldsymbol{R}$. Далее предположим, что на множестве термов определено распределение вероятностей $\{P(T_i)\}$, $i = \overline{1, N}$. Требуется найти дефаззифицированное значение $y^* \in Y$, учитывающее функции принадлежности нечетких множеств термов $\mu_{T_i}(y), i = \overline{1, N}$ и заданный на Y закон распределения.

Исходя из того, что $Y \subset \boldsymbol{R}$ – числовое множество, на котором задано распределение вероятностей, для определения значения y^* естественно воспользоваться математическим ожиданием [8] случайной величины y:

$$\mathrm{M}(y) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{y}_i \cdot P(T_i), \qquad (1)$$

где $\tilde{y}_i$ – «характерное» для терма T_i значение, а $P(T_i)$ – вероятность того, что выходная лингвистическая переменная $\tilde{Y}$ приняла значение T_i, $\tilde{y}_i \in Y$, $i = \overline{1, N}$.

В качестве «характерного» значения терма T_i естественно принять среднюю величину $\tilde{y}_i \in [T_{i,\min}; T_{i,\max}]$, где отрезок $[T_{i,\min}; T_{i,\max}]$ есть часть носителя Y, в которой функция принадлежности $\mu_{T_i}(y)$ имеет значение, большее значений функций принадлежности остальных термов $\mu_{T_j}(y)$, $j = \overline{1, N}$, $j \neq i$. Таким образом,

$$T_{i,\min} = \min\{y \in Y \mid \mu_{T_i}(y) > \mu_{T_j}(y)\},$$
$$T_{i,\max} = \max\{y \in Y \mid \mu_{T_i}(y) > \mu_{T_j}(y)\}, \quad (2)$$
$$j = \overline{1, N}, i \neq j.$$

Например, на рис. 1 выходная лингвистическая переменная $\tilde{Y}$ имеет три терма T_1, T_2 и T_3, определенных на носителе $[a; d]$. При этом, согласно правилу (2), $T_{1,\min} = a$, $T_{1,\max} = b$; $T_{2,\min} = b$, $T_{2,\max} = c$; $T_{3,\min} = c$, $T_{3,\max} = d$.

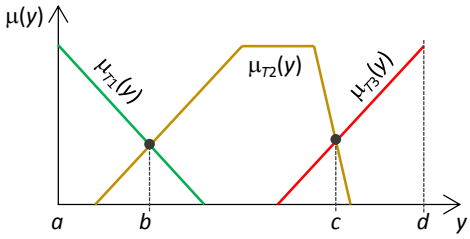

Рис. 1. Выделение интервалов термов

Таким образом, носитель Y выходной лингвистической переменной $\tilde{Y}$ покрывается системой непересекающихся интервалов $[T_{i,\min}; T_{i,\max}]$, $i = \overline{1, N}$.

В качестве среднего значения интервала $[T_{i,\min}; T_{i,\max}]$ можно выбрать его середину:

$$\bar{y}_i = \frac{T_{i,\min} + T_{i,\max}}{2}. \quad (3)$$

Формула (3) при выборе «характерного» значения терма не учитывает значения функции принадлежности $\mu_{T_i}(y)$ на отрезке $[T_{i,\min}; T_{i,\max}]$, определяющие меру принадлежности значений из этого интервала соответствующему нечеткому множеству.

Для учета значений функции принадлежности следует выбирать в качестве «характерного» значения терма T_i взвешенный центр данного интервала, используя следующее выражение:

$$\hat{y}_i = \frac{\int_{T_{i,\min}}^{T_{i,\max}} y \cdot \mu_{T_i}(y) dy}{\int_{T_{i,\min}}^{T_{i,\max}} \mu_{T_i}(y) dy}. \quad (4)$$

Значения $\bar{y}_i$ и $\hat{y}_i$, вычисленные по формулам (3) и (4), совпадут только в том случае, если функция принадлежности $\mu_{T_i}(y)$ симметрична на интервале $[T_{i,\min}; T_{i,\max}]$.

Полученный набор значений $\{(\tilde{y}_i, P(T_i))\}$, где $\tilde{y}_i = \bar{y}_i$ либо $\tilde{y}_i = \hat{y}_i$, $i = \overline{1, N}$, образует дискретную случайную величину, математическое ожидание которой (1) определяет дефаззифицированное значение $y^* \in Y$.

III. Традиционный подход к дефаззификации в нечетком выводе

При традиционном подходе к нечеткому логическому выводу на шкале выходной лингвистической переменной формируется единый итоговый терм T_R, функция принадлежности которого $\mu_{T_R}(y)$ получается комбинацией функций принадлежности $\mu_{T_i}(y)$, $i = \overline{1, N}$ исходных термов этой лингвистической переменной, определенных перед началом нечеткого вывода. В ходе комбинации, которая выполняется на этапе агрегации активированных подзаключений [6], модифицированные функции принадлежности активированных термов объединяются в единую функцию $\mu_{T_R}(y)$ (по правилу sum- или max-агрегации). Модификация функций принадлежности исходных термов $\mu_{T_i}(y)$, $i = \overline{1, N}$ определяется выбранным правилом композиции (min- или prod-композиция).

Пример получения функции принадлежности $\mu_{T_R}(y)$ итогового терма T_R выходной лингвистической переменной $\tilde{Y}$, имеющей три терма T_1, T_2 и T_3, определенных на носителе $[a; d]$, показан на рис. 2.

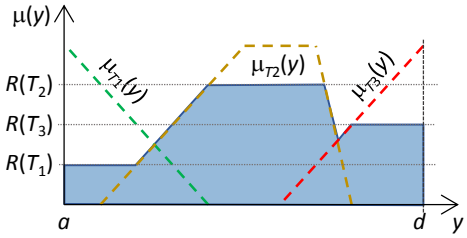

Рис. 2. Формирование итогового терма T_R

Подграфик функции принадлежности $\mu_{T_R}(y)$ итогового терма T_R выделен на рис. 2 заливкой.

Дефаззификация полученного терма T_R производится выделением на носителе Y «характерного» для этого терма значения y^*. В качестве такового обычно выбирают либо абсциссу одного из модальных значений функции $\mu_{T_R}(y)$ (левого, правого, среднего), либо абсциссу центра площади или центра тяжести полученного подграфика [6, 7]. Абсцисса центра тяжести ищется по формуле (4), заменой функции $\mu_{T_i}(y)$ на функцию $\mu_{T_R}(y)$ и заменой пределов интегрирования на границы отрезка – носителя нечеткого множества T_R (в примере на рис. 2 – границы a и d).

IV. Сравнение подходов к дефаззификации

При анализе и сравнении методов дефаззификации обращают внимание на следующие их свойства [7]:

- непрерывность;
- однозначность;
- правдоподобность;
- вычислительная сложность.

Свойство непрерывности предполагает, что малое изменение входных значений должно приводить к малому изменению дефаззифицированного значения y^*. Свойство однозначности означает, что в любых ситуациях метод дефаззификации должен давать ровно одно значение y^*. Правдоподобность означает, что дефаззифицированное значение y^* должно быть «характерным», т.е. находиться внутри области носителя, в котором функция принадлежности результирующего терма T_R принимает свое наибольшее значение. Наконец, свойство вычислительной сложности определяет, насколько вычислительно емким является процесс нахождения дефаззифицированного значения y^* на основании информации об исходных термах выходной переменной и полученном результирующем терме.

Хороший метод дефаззификации одновременно должен быть непрерывным, однозначным и правдоподобным, и при этом иметь невысокую вычислительную сложность, что особенно важно для методов дефаззификации, встраиваемые в нечеткие регуляторы и микроконтроллеры.

Отметим, что в силу того, что на этапе дефаззификации, применяемом при традиционном нечетком выводе, дефаззифицированное значение может выбираться пятью различными способами, однозначность и правдоподобность полученного значения может нарушаться, исходя из чего построенная модель нечеткого вывода должна подвергаться верификации и, возможно, последующей отладке [6]. Кроме того, получение дефаззифицированного значения по методу центра площади или методу центра тяжести требует реализации методов численного интегрирования, зачастую весьма сложных в вычислительном плане, особенно при использовании нелинейных функций принадлежности термов (гауссовой функции, *S*-, *Z*- и П-функции [5]).

Метод дефаззификации, предложенный в данной работе, и основанный на вычислении математического ожидания (1), отвечает требованиям непрерывности и правдоподобности в силу свойств математического ожидания: дефаззифицированное значение y^*, в зависимости от значения вероятностей в распределении $\{P(T_i)\}$, $i=\overline{1,N}$, смещается в сторону «характерного» значения наиболее вероятного терма выходной лингвистической переменной. Однозначность предлагаемого метода дефаззификации не ниже, чем у традиционных методов, что обусловлено меньшей степенью произвола в выборе «характерных» значений каждого из термов с использованием формул (3) или (4). Кроме того, этот метод не предполагает построения искусственного результирующего терма T_R выходной лингвистической переменной. За счет этого снижается также его вычислительная сложность: даже в случае использования формулы (3) для нахождения «характерных» значений каждого из термов T_i, полученное решение y^* незначительно отличается от дефаззифицированного значения, использующего в качестве «характерных» значений термов центры тяжести интервалов, полученные с использованием формулы (4).

V. Пример

Рассмотрим существо изложенного метода на примере, представленном в [5]. Система нечеткого логического вывода моделирует поведение автомобилиста, превышающего скорость при наличии на трассе сотрудника ДПС. В зависимости от степени превышения разрешенной скорости и расстояния до сотрудника ДПС, автомобилист должен принять решение, с какой интенсивностью нажать на педаль тормоза, чтобы сбросить скорость автомобиля до разрешенной.

Лингвистические переменные, участвующие в задаче, приведены на рис. 3–5.

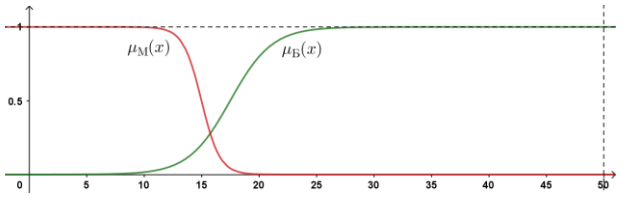

Рис. 3. Лингвистическая переменная «Превышение скорости»

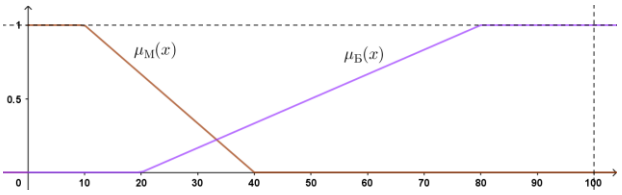

Рис. 4. Лингвистическая переменная «Расстояние»

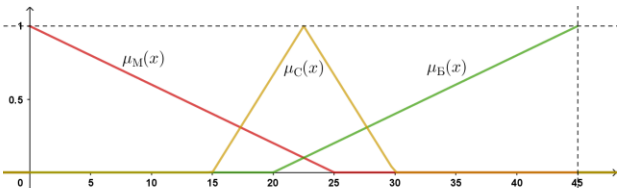

Рис. 5. Лингвистическая переменная «Сила торможения»

Нечеткие продукции, используемые при логическом выводе, представлены в табл. I.

Обратим внимание, что число продукций в данном случае больше числа возможных гипотез-заключений. Поэтому для применения байесовского логико-вероятностного вывода необходимо выполнить редукцию множества продукций, соединив продукции №2 и №3 в одну с построением ОДНФ [9] логической вероятностной функции, определяющей условную вероятность свидетельства соответствующей гипотезы.

ТАБЛИЦА I НЕЧЕТКИЕ ПРОДУКЦИИ

№ п.п.	Тело продукции	Вес продукции
1	ЕСЛИ Превышение скорости = «Большое» И Расстояние = «Малое» ТО Сила торможения = «Большая»	1,00
2	ЕСЛИ Превышение скорости = «Большое» И Расстояние = «Большое» ТО Сила торможения = «Средняя»	0,80
3	ЕСЛИ Превышение скорости = «Малое» И Расстояние = «Малое» ТО Сила торможения = «Средняя»	0,75
4	ЕСЛИ Превышение скорости = «Малое» И Расстояние = «Большое» ТО Сила торможения = «Малая»	0,90

При соединении продукций №2 и №3 в одну продукцию №2', ее вес определяется как средний вес соединяемых продукций: $w'_2 = (0{,}8 + 0{,}75)/2 = 0{,}775$. Обозначив через P_{XT} вероятность того, что входная лингвистическая переменная X приняла значение T из своего терм-множества, запишем формулы для вычисления условных байесовских вероятностей:

$$P(e|H_3) = P_{\text{ПБ}} \cdot P_{\text{РМ}};$$

$$P(e|H_2) = P_{\text{ПБ}} \cdot P_{\text{РБ}} + (1 - P_{\text{ПБ}}) \cdot P_{\text{ПМ}} \cdot P_{\text{РМ}} + (1 - P_{\text{РБ}}) \cdot P_{\text{ПМ}} \cdot P_{\text{РМ}};$$

$$P(e|H_1) = P_{\text{ПМ}} \cdot P_{\text{РБ}}.$$

Здесь H_i – гипотеза о том, что выходная переменная «Сила торможения» приняла i-е значение из своего терм-множества $\{T_1, T_2, T_3\}$ (термы пронумерованы в порядке задания их на шкале переменной слева направо).

Решим задачу нечеткого логического вывода при условии, что превышение скорости составило 20 км/ч, а расстояние до инспектора ДПС – 30 м. В этом случае (см. рис. 3, 4) вероятности принимают следующие значения:

$$P_{\text{ПБ}} = 0{,}8; \cdot P_{\text{ПМ}} = 0;\ P_{\text{РБ}} = 0{,}25; \cdot P_{\text{РМ}} = 0{,}17.$$

$$P(e|H_3) = 0{,}133;\ P(e|H_2) = 0{,}199;\ P(e|H_1) = 0{,}0005.$$

Используя веса продукций, и воспользовавшись формулой Байеса, получим апостериорное распределение вероятностей, представленное в табл. II.

ТАБЛИЦА II НЕЧЕТКИЕ ПРОДУКЦИИ

Гипотезы	H_1	H_2	H_3
«Характерные» значения термов	7,12	22,50	37,88
$P(H_i \mid e)$	0,002	0,537	0,461

«Характерные» значения термов, указанные в табл. II, получены с использованием формул (2), (4).

Воспользовавшись формулой вычисления математического ожидания (1), получим дефаззифицированное значение: $y^* = 29{,}57$.

Сравним полученное значение с результатами традиционного нечеткого вывода: $y^*_{\text{ЦТ}} = 29{,}8$; $y^*_{\text{ЦП}} = 29{,}3$; $y^*_{\text{ЛМ}} = 16{,}7$; $y^*_{\text{СМ}} = 22{,}5$; $y^*_{\text{ПМ}} = 28{,}4$.

Хорошо видно, что результаты дефаззификации при традиционном подходе к нечеткому выводу существенно зависят от выбранного способа дефаззификации. Дефаззификация результата логико-вероятностного нечеткого вывода предложенным способом наиболее близка к результатам дефаззификации по методу центра тяжести и методу центра площади, наиболее часто используемым в традиционной модели нечеткого вывода.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в данной работе способ дефаззификации значения выходной лингвистической переменной предлагается применять в качестве завершающего этапа нечеткого вывода, использующего байесовский логико-вероятностный подход, изложенный в работе Г. И. Кожомбердиевой «Байесовская логико-вероятностная модель нечеткого вывода» в настоящем сборнике.

Суть предлагаемого способа – вычисление математического ожидания дискретной случайной величины, значениями которой являются средние точки интервалов термов выходной лингвистической переменной, а законом распределения – полученное на этапе логического вывода распределение вероятностей на множестве гипотез о том, что выходная переменная получит значение из своего терм-множества.

Показано, что предлагаемый способ дефаззификации дает результаты, близкие к результатам, получаемым при традиционном подходе к решению задачи нечеткого логического вывода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кожомбердиева Г.И., Бураков Д.П. О применении модели нечеткого вывода для оценивания выполнения практик CMMI® // Интеллектуальные системы на транспорте. ИнтеллектТранс-2012: Сб. материалов II междунар. научно-практич. конф., С.-Петербург, 28–31 марта 2012 /ФАЖТ, ФГБОУ ВПО ПГУПС. СПб., 2012. С. 199–206.

[2] Кожомбердиева Г.И., Гарина М.И., Бураков Д.П. Об использовании аппарата теории принятия решений в задачах оценивания согласно модели CMMI® //Программные продукты и системы. 2013. № 4. С. 117–124.

[3] Кожомбердиева Г.И., Бураков Д.П., Гарина М.И. Использование формулы Байеса при оценивании выполнения практик модели CMMI® // Программные продукты и системы. 2017. № 1. С. 67–74.

[4] Кожомбердиева Г.И., Бураков Д.П. Байесовский подход к решению задач оценивания качества // Мягкие измерения и вычисления, 2018. № 5. С. 15–26.

[5] Бураков Д.П. Логические основы интеллектуальных систем. Ч. 1: учеб. пособие. СПб.: ФГБОУ ВО ПГУПС, 2018. 56 с.

[6] Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 736 с.

[7] Нечеткие модели и системы управления /Ю.И. Кудинов, А.Ю. Келина, И.Ю. Кудинов, А.Ф. Пащенко, Ф.Ф. Пащенко. М.: ЛЕНАНД, 2017. 328 с.

[8] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.

[9] Мерекин Ю.В. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации // Вычислительные системы. 1963. Вып. 5. С. 10–21.