Анализ корректности линейных преобразований экспертных оценок

Е. А. Бурков, Н. А. Назаренко, С.С.С. Нассер, П. И. Падерно
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)
eaburkov@gmail.com, pipaderno@list.ru, sakr85@mail.ru

***Аннотация*. Проведен анализ корректности линейных преобразований оценочных шкал при комплексировании оценок. Рассмотрен комплекс различных преобразований: масштаба, сдвига, а также линейное преобразование общего вида применительно к шести способам комплексирования экспертных оценок.**

Ключевые слова: шкалы для оценок; линейное преобразование шкал; способы усреднения; комплексная оценка; экспертные оценки

Проведен анализ последнего этапа экспертизы, в результате которой был получен вектор оценок объекта $X=(x_1, x_2,..., x_n)$ в некоторой количественной (линейной) шкале S. Рассмотрим вектор весовых коэффициентов $Q=(q_1, q_2, ..., q_n)$, элементы которого должны отражать степень уверенности в истинности соответствующих элементов вектора *X*. При проведении сложных экспертиз элементы вектора Q являются некоторыми оценками коэффициентов компетентности экспертов, участвовавших в формировании вектора *X*, хотя могут быть определены и исходя из иных соображений.

Зачастую методики обработки и анализа экспертных оценок предполагают переход от исходной оценочной шкалы S к другой шкале S', более удобной по некоторым свойствам, в то время как исходная шкала этими свойствами не обладает, однако при этом является более удобной для экспертов, проводящих оценку. Здесь возникает вопрос изоморфизма шкал S и S', а также корректности подобного перехода и различных вычислительных операций, производимых в ходе обработки над оценками в этих шкалах [1, 2, 3].

При переходе от одной шкалы к другой, наиболее часто используют следующие линейные преобразования:

1. Преобразования масштаба:

$$Y = L_1(X) = \alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n). \quad (1)$$

2. Преобразования сдвига:

$$\begin{aligned} Y &= L_2(X) = X + \beta = (x_1+\beta, x_2+\beta, ..., x_n+\beta) = \\ &= (y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned} \quad (2)$$

3. Линейное преобразование общего вида:

$$\begin{aligned} Y &= L_3(X) = \alpha X + \beta = (\alpha x_1+\beta, \alpha x_2+\beta, ..., \alpha x_n+\beta) = \\ &= (y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, что приведенные преобразования (1–3) (кроме случая, когда α = 0) естественным образом имеют обратные преобразования.

Основной задачей, решаемой при обработке экспертных оценок, является задача получения интегральной (комплексной, усредненной, обобщенной) оценки объекта относительно которого проводилась экспертиза [2, 3, 4]. Основными способами получения таких интегральных оценок являются следующие:

1. Среднее арифметическое значение $\bar{z}_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$ или средневзвешенное арифметическое $\hat{z}_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} q_i$.

2. Среднее геометрическое значение $\bar{z}_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ или средневзвешенное геометрическое $\hat{z}_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i}\right)^{1 \big/ \sum_{i=1}^{n} q_i}$.

3. Среднее квадратическое значение $\bar{z}_3(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n}$ или средневзвешенное квадратическое $\hat{z}_3(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i x_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} q_i}$.

4. Пессимистическая оценка $z_4(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_i (x_1, x_2, ..., x_n)$.

5. Оптимистическая оценка $z_5(x_1, x_2, ..., x_n) = \max_i (x_1, x_2, ..., x_n)$.

6. Среднее гармоническое $\bar{z}_6(x_1, x_2, ..., x_n) = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/x_i$ или средневзвешенное гармоническое $\hat{z}_6(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} q_i / x_i$.

Приведенные способы получения интегральных оценок (комплексирования) обладают следующим набором свойств:

$$\begin{aligned} & z_4(X) \le \bar{z}_6(X) \le \bar{z}_2(X) \le \bar{z}_1(X) \le \bar{z}_3(X) \le z_5(X), \\ & \hat{z}_4(X) \le \hat{z}_6(X) \le \hat{z}_2(X) \le \hat{z}_1(X) \le \hat{z}_3(X) \le \hat{z}_5(X). \end{aligned} \tag{4}$$

Если в ходе обработки экспертных оценок был выполнен переход к новой шкале S', то и комплексная оценка будет принадлежать той же шкале. Это не всегда удобно, потому что, например, может возникнуть необходимость предъявления комплексной оценки экспертам, сформировавшим свои мнения относительно вектора оценок X, чтобы обеспечить четкую обратную связь при проведении экспертизы. Полученная комплексная оценка, по всей видимости, будет не очень понятна экспертам, так как они использовали исходную шкалу S при выставлении оценок, а не модифицированную шкалу S'. Таким образом, возникает задача преобразования комплексной оценки, полученной в преобразованной шкале S' назад в исходную шкалу S . Наиболее элементарным решением изложенной задачи представляется применение преобразования обратного тому, которое использовалось при переходе от шкалы S к шкале S'. Зачастую применение обратного преобразования (обратной функции) не всегда дает корректный результат, что, в значительной степени, зависит от характера преобразования и способа получения интегральной (комплексной) оценки, которая подвергается обратному преобразованию. При этом под корректностью подразумевается сохранение комплексной оценки при переходе от шкалы S' обратно к шкале S , т. е. должно выполняться равенство

$$L^{-1}\left(\bar{z}_i(L(X))\right) = \bar{z}_i\left(X\right), \tag{5}$$

или иначе

$$L\left(\bar{z}_i(X)\right) = \bar{z}_i\left(L(X)\right). \tag{6}$$

Как показано в [5], преобразование масштаба и обратное ему преобразование сохраняют значения всех средних, т. е. выполняются равенства $L_1\left(\bar{z}_i(X)\right) = \bar{z}_i\left(L_1(X)\right), i = \overline{1,6}$. Однако для случая преобразования сдвига, не говоря уже о линейном преобразовании общего вида, это утверждение справедливо далеко не всегда.

Достаточно очевидна справедливость выполнения следующих равенств:

$$\begin{aligned} & L_2\left(\bar{z}_i(X)\right) = \bar{z}_i\left(L_2(X)\right), i = 1,4,5; \\ & L_3\left(\bar{z}_i(X)\right) = \bar{z}_i\left(L_3(X)\right), i = 1,4,5; \\ & L_2\left(\hat{z}_i(X)\right) = \hat{z}_i\left(L_2(X)\right), i = 1,4,5; \\ & L_3\left(\hat{z}_i(X)\right) = \hat{z}_i\left(L_3(X)\right), i = 1,4,5; \end{aligned} \tag{7}$$

т. к. изменение порядка двух линейных (квазилинейных) операций является просто суперпозицией линейных операторов. В ряде других случаев требуется более глубокий анализ ситуации.

Ситуация 1. Проведем анализ для среднего геометрического в исходной шкале и шкале, подвергнутой преобразованию сдвига (сдвинутой шкале). Интегральная оценка в исходной шкале имеет вид $\bar{z}_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$. Применив к ней преобразование сдвига, получим $L_2\left(\bar{z}_2(X)\right) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \beta$. Интегральная оценка в сдвинутой шкале имеет вид $\bar{z}_2\left(Y\right) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i + \beta\right)}$.

Докажем выполнение неравенства (8)

$$L_2\left(\bar{z}_2(X)\right) \le \bar{z}_2\left(Y\right), \tag{8}$$

т. е. выполнение неравенства

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \beta \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i + \beta\right)}. \tag{9}$$

Возводя обе части неравенства (9) в степень n и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях β можно увидеть, что свободный член в левой и правой части (9) равен $\prod_{i=1}^{n} x_i$, а коэффициент при β^n – равен единице. Обобщая, коэффициенты при β^{n-k} в левой части (9) равны $C_n^k\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)^k$, а коэффициенты при β^{n-k} в правой части – $\sum x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_k}$, причем суммирование производится по всем возможным различным наборам (сочетаниям) $j_1, j_2, ..., j_k$. Как известно, число таких наборов равно C_n^k , и ровно C_{n-1}^{k-1} из них содержит каждый из элементов вектора X.

Так как среднее арифметическое больше либо равно среднему геометрическому, то получаем, что:

$$\frac{\sum x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}}{C_n^k} \ge \left(\prod x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}\right)^{1/C_n^k} =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} x_i^{\left(\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}\right)} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^k} = \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)^k . \qquad (10)$$

Из выполнения неравенства (10) следует, что каждый коэффициент при β^{n-k} в левой части неравенства (9) не превосходит аналогичного коэффициента при β^{n-k} в правой части (9). Это свидетельствует о справедливости неравенства (9) и, следовательно, неравенства (8).

Таким образом, в сдвинутой шкале значение среднего геометрического оказывается сдвинутым больше чем на параметр сдвига β, следовательно, при обратном преобразовании комплексная оценка оказывается завышенной.

Замечание 1.1 Все приведенные рассуждения проводились при предположении о положительности сдвига, т. е. при сдвиге влево среднее геометрическое также сдвинется влево, но на большее значение, чем параметр сдвига.

Замечание 1.2 При значительном увеличении параметра сдвига среднее геометрическое будет стремиться к среднему арифметическому, т. е. теряется смысл выбранного способа определения комплексной оценки.

Ситуация 2. Проведем анализ для среднего квадратического в исходной и сдвинутой шкалах.

Интегральная оценка в исходной шкале имеет вид $\bar{z}_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n}$.

При сдвиге, т. е. при выполнении операции $L_2\left(\bar{z}_3(X)\right)$, получаем, что $L_2\left(\bar{z}_3(X)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n} + \beta$.

В сдвинутой шкале интегральная оценка имеет вид $\bar{z}_3(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + \beta)^2 \Big/ n}$.

Докажем, что выполняется неравенство

$$L_2\left(\bar{z}_3(X)\right) \ge \bar{z}_3(Y), \qquad (11)$$

т. е. выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n} + \beta \ge \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + \beta)^2 \Big/ n}. \qquad (12)$$

Квадрат левой части неравенства (12) равен $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n + 2\beta \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n} + \beta^2$, а квадрат правой части – $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n + 2\beta \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n + \beta^2$.

Из известного неравенства $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n} \ge \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$ следует, что квадрат правой части неравенства (12) не превышает квадрат левой части того же неравенства, что доказывает справедливость неравенств (11) и (12).

Таким образом, в сдвинутой шкале значение среднего квадратического, оказывается, сдвинутым меньше, чем на постоянную сдвига β, следовательно, при обратном преобразовании оно оказывается заниженным.

Замечание 2.1 Все предыдущие рассуждения проводились при предположении о положительности сдвига. При отрицательном сдвиге, т. е. при сдвиге влево среднее квадратическое также сдвинется влево, но на меньшее значение, чем параметр сдвига.

Замечание 2.2 При значительном увеличении параметра сдвига среднее квадратическое будет стремиться к среднему арифметическому, т. е. теряется смысл выбранного способа определения интегральной оценки.

Ситуация 3 Проведем анализ для среднего гармонического в исходной и сдвинутой шкалах.

Интегральная оценка в исходной шкале имеет вид $\bar{z}_6(x_1, x_2, \dots, x_n) = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/x_i$.

При сдвиге получаем, что $L_2\left(\bar{z}_6(X)\right) = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/x_i + \beta$.

В сдвинутой шкале интегральная оценка имеет вид $\bar{z}_6(Y) = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/(x_i + \beta)$.

Докажем, что выполняется неравенство

$$\bar{z}_6(Y) \ge L_2\left(\bar{z}_6(X)\right), \qquad (13)$$

т. е. выполняется неравенство

$$n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/(x_i + \beta) \ge n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/x_i + \beta. \qquad (14)$$

При $\beta = 0$ неравенство (14) обращается в равенство. Покажем, что при увеличении β правая часть неравенства (14) возрастает не быстрее левой.

Производная левой части по β равна $n\sum_{i=1}^{n} 1/(x_i+\beta)^2 \bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} 1/(x_i+\beta)\right)^2$, а производная правой части равна единице. Следовательно, доказательство справедливости неравенства (14) сводится к доказательству справедливости неравенства (15)

$$n\sum_{i=1}^{n} 1/(x_i+\beta)^2 \bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} 1/(x_i+\beta)\right)^2 \geq 1. \qquad (15)$$

Умножив обе части на знаменатель стоящего слева выражения, разделив их на n^2, выполнив извлечение квадратного корня, а также введя обозначение $t_i = 1/(x_i+\beta)$, получим неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} \bigg/ \sqrt{n} \geq \sum_{i=1}^{n} t_i \bigg/ n. \qquad (16)$$

Справедливость неравенства (16) следует из (4), т. к. выражение в левой части этого неравенства представляет собой среднее квадратическое, которое всегда не меньше, чем среднее арифметическое, которое представляет собой правая часть неравенства. Это свидетельствует о справедливости неравенств (14) и (13).

Таким образом, в сдвинутой шкале значение среднего гармонического, оказывается, сдвинутым больше, чем на постоянную сдвига β, следовательно, при обратном преобразовании оно, оказывается, завышенным.

Замечание 3.1 Все рассуждения проводились при предположении о положительности сдвига, т. е. при сдвиге влево среднее гармоническое также сдвинется влево, но на большее значение, чем параметр сдвига.

Замечание 3.2 При значительном увеличении параметра сдвига среднее гармоническое будет стремиться к среднему арифметическому, т. е. теряется смысл выбранного способа определения комплексной оценки.

Результаты, полученные при анализе преобразования сдвига можно распространить на общее линейное преобразование (3), т. к. оно представляет собой суперпозицию линейных преобразований (1) и (2), и при этом преобразование масштаба, как уже отмечалось выше, сохраняет значение всех средних.

Вывод: на основе результатов проведенного анализа можно заключить, что использовать обратное линейное преобразование общего вида или сдвига, чтобы вернуть комплексную оценку в исходную шкалу оценивания, некорректно, если данная оценка была получена в виде среднего геометрического, среднего квадратического или среднего гармонического.

Список литературы

[1] Барский Б.В., Соколов М.В. Средние величины, инвариантные относительно допустимых преобразований шкалы измерения // Заводская лаборатория. 2006. Т. 72. № 1. С. 59-66.

[2] Бурков Е.А., Назаренко Н.А., Падерно П.И. Основы квалиметрии. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 64 с.

[3] Варжапетян А.Г. Квалиметрия. СПб.: ГУАП, 2005. 176 с.

[4] Орлов А.И. Математические методы исследования и теория измерений // Заводская лаборатория. 2006. Т. 72. № 1. С.67-70.

[5] Дутова Е.Д., Назаренко Н.А., Падерно П.И. Анализ влияния технологии преобразования и комплексирования экспертных оценок на результат // Сборник докладов XIX-й Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям. Санкт-Петербург, 25–27 мая 2016 г. Том 1. С. 58-61.