

# Вычислительный комплекс для обеспечения неинвазивного определения концентрации глюкозы в крови человека

В. В. Шаповалов, Б. С. Гуревич, С. Ю. Дудников, И. Г. Загорский, Ю. О. Боброва  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

**Аннотация.** Рассмотрен вычислительный комплекс, входящий в состав глюкометра, обеспечивающего определение глюкозы в крови пациента без забора крови. Этот комплекс включает в себя составление и решение системы линейных уравнений, в которых неизвестными являются концентрации различных компонентов кровесодержащего органа пациента, в котором происходит поглощение зондирующего излучения, а параметрами - коэффициенты поглощения каждого из компонентов на различных длинах волн. Рассмотрены также условия сходимости решения системы уравнений и влияние на эту сходимость количества измерений интенсивности света, поглощенного кровесодержащим органом на одной и той же длине волны.

**Ключевые слова:** математическая модель неинвазивного глюкометра, система линейных уравнений, метод Гаусса, сходимость решения

## I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наиболее перспективными неинвазивными методами определения содержания глюкозы в крови считаются оптические методы на базе спектроскопии ближнего ИК диапазона. Они позволяют получать определенную информацию о содержании различных примесей в крови, в том числе глюкозы. Исследования в этой области ведутся достаточно широко и уже накоплен значительный исследовательский опыт [1, 2]. Главным обстоятельством, затрудняющим получение объективных данных при реализации спектроскопического метода, является то, что полоса длин волн света, поглощаемая глюкозой, существенно перекрывается с полосой поглощения, характерной для воды и других веществ, содержащихся в коже и тканях человека. В результате возникает сложная задача определения доли света, за поглощение которой ответственна именно глюкоза. Эта задача может быть решена путем многократного фотометрирования во многих произвольно выбранных точках спектра, внутри которого происходит перекрытие поглощения света глюкозой и другими поглощающими компонентами [3].

---

Работа проводится при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение от 26.09.2017 № 14.575.21.0141, уникальный идентификатор ПНИЭР - RFMEFI57517X0141).

## II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕИНВАЗИВНОГО ГЛЮКОМЕТРА

Основную роль в определении концентрации глюкозы в крови, кроме измерений интенсивности поглощенного света на разных длинах волн, играет вычислительный комплекс, построенный на базе математической модели, разработанной для данного типа устройства.

В основу модели положен тот факт, что разработка спектроскопических неинвазивных методов определения содержания глюкозы [1, 4] до сих пор наталкивалась на препятствие, обусловленное сложностью выделения количества излучения, поглощенного глюкозой при измерениях на различных частях тела человека, из общего количества поглощенного излучения, в том числе на компонентах кожи, тканей, а также различных составляющих крови.

Таким образом, возникает необходимость решения задачи определения доли света, за поглощение которой ответственна именно глюкоза. Эта задача может быть решена путем многократного фотометрирования в многих произвольно выбранных точках спектра, внутри которого происходит перекрытие поглощения света глюкозой и другими поглощающими компонентами. Решение обусловлено тем, что спектральные характеристики всех поглощающих агентов (глюкозы, воды, меланина, других веществ, содержащихся в крови и тканях), чаще всего, хорошо известны. В тех случаях, когда имеющиеся данные недостаточно полны или достоверны, эти спектральные характеристики должны быть измерены и сведены в библиотеку данных.

При создании математической модели за основу определения доли поглощенного света в крови был взят закон Бугера–Ламберта–Бера

$$I_0 = I(l)e^{k_\lambda l} \quad (1)$$

где:

$I_0$  – интенсивность света, на входе в вещество;  
 $I(l)$  – интенсивность света, на выходе вещества;  
 $k_\lambda$  – коэффициент поглощения вещества;  
 $l$  – толщина вещества.

Так как в общем смысле этот закон используется только для однотипного вещества (точнее для вещества, у

которого есть определенная толщина), он был видоизменен. А именно, наша формула приобрела вид:

$$I_0 = I e^{(k_m n_m + k_p n_p + \dots + k_z n_z)} \quad (2)$$

где:  $k_m$  – коэффициент поглощения вещества типа  $m$  на  $i$ -ой длине волны в слое  $l_0$  (безразмерная величина);  $n_m$  – концентрация вещества типа  $m$ , распределённая на толщину слоя  $l_0$ .

После определенного преобразования, получаем простое линейное уравнение:

$$k_m n_m + k_p n_p + \dots + k_z n_z = \ln I_0 / I \quad (3)$$

Тогда, например, для раствора глюкозы и воды формула доли поглощения света имеет вид:

$$k_w n_w + k_g n_g = \ln I_0 / I, \quad (4)$$

где  $g$  – глюкоза,  $w$  – вода.

Так как каждый из поглощающих компонентов имеет свою спектральную характеристику поглощения и учитывая, что в растворе отсутствует понятие толщины вещества, предложенная нами формула позволяет измерять процентное составляющее любого вещества в данном растворе.

Вместе с тем если осуществить измерения на  $N$  длинах волн в пределах спектрального диапазона устройства, то для каждого из измерений можно написать такое уравнение с  $N$  неизвестными. В итоге можно получить систему из  $N$  линейных уравнений с  $N$  неизвестными, которая может быть оперативно решена с помощью специально разработанного программного обеспечения. Одним из решений этой системы уравнений и будет концентрация глюкозы в крови.

Математические вычисления сводятся к решениям систем линейных уравнений, причем в каждой решаемой системе число уравнений равно числу неизвестных. Такую систему можно записать в виде

$$Ax = b,$$

где  $A$  – заданная квадратная матрица порядка  $n$ ,  $b$  – заданный вектор-столбец с  $n$  компонентами и  $x$  – неизвестный вектор-столбец с  $n$  компонентами.

Наиболее простым методом решения таких систем является метод Гаусса. Он позволяет решить не только системы линейных уравнений, в которых число уравнений совпадает с количеством неизвестных переменных и основная матрица системы невырожденная, но и системы уравнений, в которых число уравнений не совпадает с количеством неизвестных переменных или определитель основной матрицы равен нулю;

Метод Гаусса приводит к результату при сравнительно небольшом количестве вычислительных операций. Его суть заключена в последовательном исключении неизвестных переменных. Поэтому метод Гаусса также называют методом последовательного исключения неизвестных.

Тем не менее, особенность заполнения матрицы с входными данными связана с тем, что столбцы и строки в случае изменения данных по закону, близкому к линейному, часто приводит к тому, что в пересчетной формуле Гаусса определитель близок к нулю, что не позволяет получить достоверный результат.

Поэтому для получения гарантийного результата часто используют более надежный метод, основанный на матричной факторизации, называемой сингулярным разложением.

Метод сингулярного разложения основан на разложении (преобразовании) исходной прямоугольной матрицы из  $m$  строк и  $n$  столбцов и приведении ее к виду

$$A = U \Sigma V^T,$$

где  $U$  – ортогональная  $m \times m$  – матрица,  $V$  – ортогональная  $n \times n$  – матрица, а  $\Sigma$  – диагональная  $m \times n$  – матрица, у которой  $\sigma_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $\sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$ . Величины  $\sigma_i$  называются сингулярными числами матрицы  $A$ , а столбцы матриц  $U$  и  $V$  – левыми и правыми сингулярными векторами.

Разложение матрицы получается за счет нормировки, отражения и вращения векторов. Если через  $y$  обозначить вектор размерности  $m$  с элементами  $y_i$ , а через  $c$  – вектор размерности  $n$  с компонентами  $c_j$ , то приближенные равенства

$$\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(t_i) \approx y_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

можно переписать в виде:

$$Ac \approx y.$$

Такое разложение осуществляет используемая подпрограмма сингулярного разложения. На выходе данной подпрограммы, исходя из входной матрицы  $A$ , получаем на выходе три матрицы  $\Sigma$ ,  $U$  и  $V$ . Таким образом, сингулярным разложением действительной  $m \times n$  – матрицы  $A$ , является всякая ее факторизация вида  $A = U \Sigma V^T$ .

С использованием матриц  $U$  и  $V$  преобразуем исходную систему уравнений  $Ac \approx y$  к следующему виду:

$$\Sigma c = \bar{y}$$

или

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \dots 0 \\ \vdots \sigma_i \vdots \\ 0 \dots \sigma_n \end{pmatrix} \bar{c} = \bar{y}$$

В принципе, если все  $\sigma_i$  отличны от нуля, можно разрешить преобразованные уравнения, полагая, что

$$c_i = \frac{\bar{y}_i}{\sigma_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Все  $\sigma_j$  не равны нулю тогда и только тогда, когда базисные функции  $\varphi_j$  линейно независимы в заданных точках и близки к нулю. Так как нуль в реальных системах труднодостижимая величина, считаем случай вырожденным. Введение границы  $\tau$  приводит к правильному использованию сингулярного разложения

$$c_j = \frac{\bar{y}_j}{\sigma_j}, \text{ если } \sigma_j > \tau \text{ и } 0, \text{ если } \sigma_j \leq \tau$$

где  $\tau$  – малое число, отражающее точность исходных данных.

Описанный метод сингулярного разложения позволяет с достаточной точностью позволяет решать системы уравнений в ситуации, когда определитель системы близок к нулю. Вместе с тем метод Гаусса дает лучшие результаты в случаях, когда компоненты имеют существенно различные спектральные характеристики поглощения, как это имеет место в рассматриваемом нами случае.

### III. МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В связи с тем, что точность результатов измерений интенсивности света, прошедшего через кровесодержащий орган, может оказаться недостаточной, а также учитывая то, что каждое единичное измерение осуществляется в конечной полосе длин волн, необходимо обеспечить следующие меры, позволяющие обеспечить сходимость решения системы линейных уравнений:

- набор статистических данных по поглощению на каждой из длин волн с вычислением математического ожидания и дисперсии;

- математическую коррекцию, связанную с конечной полосой пропускания пучка оптического излучения на каждой из длин волн;
- математическую коррекцию, связанную с конечными размерами пикселей многоэлементного фотоприемника, используемого при измерениях;
- увеличение числа уравнений в системе (при сохранении числа неизвестных) путем проведения измерений на дополнительных длинах волн.

### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычислительный комплекс на базе предложенной математической модели обеспечивает вычисление концентрации глюкозы в крови неинвазивным методом, исходя только из измеренных величин интенсивности поглощенного излучения в кровесодержащем органе человека. Данный вычислительный комплекс планируется использовать в разрабатываемом неинвазивном глюкометре спектроскопического типа.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Базаев Н.А. Оптические методы неинвазивного определения уровня глюкозы в крови / Н.А. Базаев, Ю.П.Маслобоев, С.В. Селищев // Медицинская техника. 2011. №6. С. 29-33.
- [2] Khalil O.S. Non-invasive glucose measurements at the dawn of the new millennium: an update// O.S.Khalil / Diabetes Technol. Ther. 2004. Oct;6(5). P. 660-697.
- [3] Шаповалов В.В. Неинвазивное определение концентрации глюкозы в крови с использованием полихромного источника света с управляемым спектром/ В.В.Шаповалов, Б.С.Гуревич., О.С.Медведев // Биомедицинская радиоэлектроника. 2016. №8. С. 59-62.
- [4] Liu R., Chen W., Gu X.et al. Chance correlation in non-invasive glucose measurement using near-infrared spectroscopy// Journal of Physics D: Applied Physics. 2005. V. 38.