Анализ влияния маргинальных экспертных оценок на интегральную экспертную оценку

Е. А. Бурков[1], П. И. Падерно[2]
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
Санкт-Петербург, Россия
[1]eaburkov@gmail.com, [2]pipaderno@list.ru

О. Е. Сирык
Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко
Киев, Украина
lavrova_olia@ukr.net

Е. А. Лавров
Сумский государственный университет
Сумы, Украина
prof_lavrov@mail.ru

Н. Б. Пасько
Сумский национальный аграрный университет
Сумы, Украина
nbpasko@gmail.com

Аннотация. **Проведен анализ возможности корректировки интегральной экспертной оценки путем исключения маргинальных экспертных оценок. Рассмотрены возникающие при этом диапазоны изменения интервальной оценки и определены их верхние и нижние границы при различных способах агрегирования экспертных оценок.**

Ключевые слова: эксперты; маргинальные оценки; интегральная оценка; интервал изменения; исключение экспертов

Для решения задач многокритериального выбора в условиях неопределенности, вызванных субъективной природой отдельных критериев, широко применяются методы экспертного оценивания [1, 2]. Группа отобранных экспертов производит оценку имеющихся альтернатив по каждому из критериев, не позволяющих получить оценку иными более точными и объективными способами. Для каждого подобного критерия предварительно разрабатывается количественная шкала, отражающая специфику данного критерия. После проведения этапа оценивания альтернатив производится обработка экспертных оценок [3, 4], которая включает этапы проверки их согласованности и вычисления интегральной оценки. И хотя существуют различные методы получения интегральной оценки [5], в основном все они исходят из предположения, что интегральная оценка представляет собой среднюю оценку по группе экспертов, полученную тем или иным способом. Предварительная проверка согласованности требуется, чтобы найденная интегральная оценка не оказалась пресловутой средней температурой по больнице. Причины низкой согласованности экспертов могут быть различными: неодинаковое понимание экспертами семантики критерия, большая разница в уровне их компетентности, спонтанная или намеренная необъективность отдельных экспертов. Оценки, которые существенно отличается от оценок большинства или ядра экспертной группы, принято называть маргинальными. В ряде случаев их анализ позволяет обнаружить ранее упущенные аспекты решаемой задачи, однако зачастую их принято рассматривать как флуктуации, которые оказывают негативное влияние на результат вычисления интегральной оценки. Например, возможна ситуация, когда эксперт лоббирует интересы некоторого лица путем завышения оценок одним и занижения их другим альтернативам. Поэтому востребованы способы, позволяющие устранить негативное влияние маргинальных экспертных оценок на интегральную экспертную оценку. На практике для этого обычно применяется простой и имеющий корни в статистической обработке данных способ, заключающийся в отбрасывании маргинальных оценок при вычислении интегральной. Такой подход к борьбе с влиянием отдельных экспертов на общий результат практикуется в спорте, в частности в фигурном катании и художественной гимнастике, когда при вычислении средней оценки за выступление отбрасывают самую высокую и самую низкую оценки. Однако возникает вопрос, насколько эффективен такой подход и как на него влияют различные параметры экспертизы: ширина шкалы, количество экспертов, способ вычисления интегральной оценки. Поэтому в данной статье проведен анализ степени влияния маргинальных экспертных оценок на интегральную экспертную оценку в зависимости от выбранного способа агрегирования групповых оценок.

Рассмотрим методику обработки экспертных оценок, которая предполагает, что перед вычислением интегральной оценки будут исключены несколько самых высоких и несколько самых низких экспертных оценок.

Введем следующие обозначения:

- n – общее число экспертов;
- l – число экспертов, поставивших объекту экспертизы низкие оценки, которые не будут учитываться при вычислении интегральной оценки объекта;
- m – число экспертов, поставивших объекту экспертизы высокие оценки, которые не будут учиты-

ваться при вычислении интегральной оценки объекта;

- a – минимальная оценка, допустимая используемой шкалой;
- b – максимальная оценка, допустимая используемой шкалой.

Представим результат оценочного этапа экспертизы в виде вектора оценок $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ некоторого объекта в количественной шкале, ограниченной и сверху и снизу. Тогда для оценки, полученной от каждого из n экспертов, справедливо следующее неравенство:

$$a \le x_i \le b, \; i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где a – минимальная оценка, допустимая используемой шкалой, а b – максимальная. В дальнейшем будем полагать, что все оценки положительны, т. е. выполняется неравенство $a > 0$.

Также будем считать, что экспертные оценки упорядочены по возрастанию, т. е. выполняется неравенство:

$$x_1 \le x_2 \le ... \le x_n . \tag{2}$$

Чтобы выбранная методика обработки экспертных оценок не делала проведение экспертизы бессмысленным, должно выполняться следующее требование:

$$m + l < n . \tag{3}$$

Рассмотрим 3 способа получения интегральной экспертной оценки:

1) среднее арифметическое;
2) среднее геометрическое;
3) среднее квадратическое.

Способ 1. Интегральная оценка вычисляется как среднее арифметическое оценок отдельных экспертов

Введем в рассмотрение две различные интегральные оценки, получаемые по полному и сокращенному составу экспертов:

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \tag{4}$$

$$Q^* = \frac{\sum_{i=l+1}^{n-m} x_i}{n - m - l}, \tag{5}$$

где выражение (4) соответствует базовой интегральной оценке, полученной с учетом маргинальных оценок, а выражение (5) соответствует скорректированной интегральной оценке, при вычислении которой были исключены m самых высоких и l самых низких экспертных оценок.

Чтобы оценить степень влияния маргинальных оценок на интегральную оценку, найдем верхнюю и нижнюю границы разности между оценками (4) и (5):

$$Q - Q^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum_{i=l+1}^{n-m} x_i}{n - m - l}. \tag{6}$$

Очевидно, что минимальное и максимальное значения разности (6) достигаются в крайних случаях, когда все оценки отдельных экспертов равны либо a, либо b.

Для примера рассмотрим ситуацию, когда $m = l = 1$. Тогда разность (6) можно записать как:

$$Q - Q^* = \frac{x_n + \sum_{i=2}^{n-1} x_i + x_1}{n} - \frac{\sum_{i=2}^{n-1} x_i}{n-2} = \frac{x_n + x_1}{n} - \frac{2\sum_{i=2}^{n-1} x_i}{n(n-2)}. \tag{7}$$

Обозначим сумму оценок по i от 2 до $(n – 1)$ как u и преобразуем разность (7) к следующему виду:

$$Q - Q^* = \frac{x_n}{n} + \frac{x_1}{n} - \frac{2u}{n}. \tag{8}$$

Проанализируем, при каких условиях разность (8) достигает своего максимального значения. Для этого должны выполняться три условия:

1. оценка x_n должна принимать максимально допустимое шкалой значение, т. е. $x_n = b$;
2. оценка x_1 должна принимать максимально допустимое шкалой значение, т. е. $x_1 = b$;
3. сумма оценок u должна быть минимальной, т. е. должно выполняться равенство $x_2 = … = x_{n–1} = a$.

Однако третье условие вступает в противоречие со вторым, т. к. согласно неравенству (2) оценка x_1 не может быть больше какой-либо другой оценки. Поскольку сомножитель u в разности (8) в два раза больше сомножителя x_1, а также принимая во внимание аддитивный характер u, приоритет третьего условия выше приоритета второго условия. Поэтому максимум разности (8) достигается в крайнем случае, $x_1 = x_2 = … = x_{n–1} = a$ и $x_n = b$.

Аналогично рассуждая, можно получить, что минимум разности (8) будет достигается в другом крайнем случае, когда $x_2 = … = x_n = b$ и $x_1 = a$.

Перейдем к поиску верхней и нижней границ разности (6) в общем виде.

Минимальное значение разности (6) достигается в том случае, когда все оценки, кроме l низких оценок, равны b, а l низких оценок равны a.

$$\begin{cases} x_{n-l+1} = \ldots = x_n = b, \\ x_1 = \ldots = x_l = a. \end{cases} \tag{9}$$

Преобразуя разность (6) в соответствии с системой равенств (9) получаем:

$$Q - Q^* = \frac{la + (n-l)b}{n} - b = -\frac{l}{n}(b - a). \tag{10}$$

Максимальное значение разности (6) достигается в том случае, когда все оценки, кроме m высоких оценок, равны a, а m высоких оценок равны b.

$$\begin{cases} x_{n-m+1} = \ldots = x_n = b, \\ x_1 = \ldots = x_{n-m} = a. \end{cases} \tag{11}$$

Преобразуя разность (6) в соответствии с системой равенств (11) получаем:

$$Q - Q^* = \frac{(n-l)a + mb}{n} - a = \frac{m}{n}(b-a). \tag{12}$$

Таким образом, исходя из (10) и (12) можно сделать вывод, что при агрегировании экспертных оценок методом среднего арифметического разность между базовой и скорректированной интегральной оценками будет находиться в интервале:

$$-\frac{l}{n}(b-a) \le Q - Q^* \le \frac{m}{n}(b-a). \tag{13}$$

Очевидно, что если число отбрасываемых высоких и низких оценок одинаково, т. е. выполняется соотношение $m = l = k$, то выражение (13) может быть представлено в следующем виде:

$$\left| Q - Q^* \right| \le \frac{k}{n}(b-a). \tag{14}$$

Следует заметить, что использование медианы в качестве способа нахождения интегральной оценки равносильно (для нечетного числа экспертов) отбрасыванию k высоких и k низких оценок, и в этом случае выражение (14) будет иметь вид:

$$\left| Q - Q^* \right| \le \frac{k}{2k+1}(b-a). \tag{15}$$

Способ 2. Интегральная оценка вычисляется как среднее геометрическое оценок отдельных экспертов

По аналогии с первым случаем введем в рассмотрение две различные интегральные оценки, получаемые по полному и сокращенному составу экспертов:

$$R = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}, \tag{16}$$

$$R^* = \left(\prod_{i=l+1}^{n-m} x_i \right)^{\frac{1}{n-m-l}}, \tag{17}$$

где (16) является базовой интегральной оценкой, полученной с учетом маргинальных оценок, а (17) представляет собой скорректированную интегральную оценку, при вычислении которой были исключены m самых высоких и l самых низких экспертных оценок.

Найдем верхнюю и нижнюю границы отношения интегральных оценок (16) и (17):

$$R / R^* = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \Bigg/ \left(\prod_{i=l+1}^{n-m} x_i \right)^{\frac{1}{n-m-l}}. \tag{18}$$

Минимальное значение отношения (18) достигается, когда все оценки, кроме l низких, равны b, а l низких оценок равны a, т. е. имеет место случай (9). Тогда отношение (18) примет вид:

$$R / R^* = \frac{\sqrt[n]{a^l b^{n-l}}}{b} = \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{l}{n}} = \left(\frac{b}{a} \right)^{-\frac{l}{n}}. \tag{19}$$

Соответственно максимальное значение отношения (18) достигается в том случае, когда все оценки, кроме m высоких, равны a, а m максимальных оценок равны b, т. е. выполняется система условий (11). Тогда отношение (18) примет вид:

$$R / R^* = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m} b^m}}{a} = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{m}{n}}. \tag{20}$$

Таким образом, исходя из (19) и (20) можно сделать вывод, что при агрегировании экспертных оценок методом среднего геометрического отношение базовой и скорректированной интегральных оценок будет находиться в интервале:

$$\left(\frac{b}{a} \right)^{-\frac{l}{n}} \le R / R^* \le \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{m}{n}}. \tag{21}$$

В случае необходимости выражение (21) может быть преобразовано к виду:

$$-\frac{l}{n}(\ln b - \ln a) \le \ln R - \ln R^* \le \frac{m}{n}(\ln b - \ln a). \tag{22}$$

Очевидно, что если число отбрасываемых высоких и низких оценок одинаково, т. е. выполняется соотношение $m = l = k$, то выражение (22) может быть представлено в виде:

$$\left| \ln R - \ln R^* \right| \le \frac{k}{n}(\ln b - \ln a). \tag{23}$$

Способ 3. Интегральная оценка вычисляется как среднее квадратическое оценок отдельных экспертов

Введем в рассмотрение две различные интегральные оценки, получаемые по полному и сокращенному составу экспертов:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}, \tag{24}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=l+1}^{n-m} x_i^2}{n-m-l}}, \tag{25}$$

где (24) является базовой интегральной оценкой, полученной с учетом маргинальных оценок, а (25) представляет собой скорректированную интегральную оценку, при вычислении которой были исключены m самых высоких и l самых низких экспертных оценок.

Найдем верхнюю и нижнюю границы разности между оценками (24) и (25):

$$S - S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} - \sqrt{\frac{\sum_{i=l+1}^{n-m} x_i^2}{n-m-l}} \, . \qquad (26)$$

Минимальное значение разности (26) достигается в том случае, когда все оценки, кроме l низких оценок, равны b, а l низких оценок равны a (случай (9)). Тогда получаем:

$$S - S^* = \sqrt{\frac{la^2 + (n-l)b^2}{n}} - b = \frac{-l\left(b^2 - a^2\right)}{n\left(\sqrt{\frac{la^2 + (n-l)b^2}{n}} + b\right)} . \qquad (27)$$

Максимальное значение разности (26) достигается в том случае, когда все оценки, кроме m высоких оценок, равны a, а m высоких оценок равны b (случай (11)). Тогда получаем:

$$S - S^* = \sqrt{\frac{(n-m)a^2 + mb^2}{n}} - a = $$
$$= \frac{m\left(b^2 - a^2\right)}{n\left(\sqrt{\frac{(n-m)a^2 + mb^2}{n}} + a\right)} . \qquad (28)$$

На основании (27) и (28) можно сделать вывод, что при агрегировании экспертных оценок методом среднего квадратического для разности базовой и скорректированной интегральных оценок справедливо следующее неравенство:

$$\frac{-l}{\sqrt{\frac{la^2 + (n-l)b^2}{n}} + b} \le \frac{n\left(S - S^*\right)}{b^2 - a^2} \le \frac{m}{\sqrt{\frac{(n-m)a^2 + mb^2}{n}} + a} . \qquad (29)$$

Очевидно, что если число отбрасываемых высоких и низких оценок одинаково, т. е. выполняется соотношение $m = l = k$, то выражение (29) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{-k}{\sqrt{\frac{nb^2 - k(b^2 - a^2)}{n}} + b} \le \frac{n\left(S - S^*\right)}{b^2 - a^2} \le$$
$$\le \frac{k}{\sqrt{\frac{nb^2 - (n-k)(b^2 - a^2)}{n}} + a} . \qquad (30)$$

Вывод

На основе результатов проведенного анализа можно заключить, что:

1. при вычислении интегральной оценки в виде среднего арифметического величина влияния на нее маргинальной оценки одного эксперта не превышает 100 / n процентов от ширины шкалы;
2. интегральная оценка в виде среднего арифметического одинаково чувствительна как к завышенным, так и к заниженным экспертным оценкам;
3. при вычислении интегральной оценки в виде среднего геометрического величина влияния на нее маргинальной оценки одного эксперта не превышает 100 / n процентов от ширины логарифмированной шкалы;
4. при вычислении интегральной оценки в виде среднего квадратического величина влияния на нее маргинальной оценки одного эксперта, выраженная в процентах от ширины шкалы, представляет собой степенную функцию, стремящуюся к нулю с ростом n;
5. интегральная оценка в виде среднего квадратического значительно более чувствительна к завышенным, чем к заниженным экспертным оценкам.

Список литературы

[1] Бурков Е.А., Падерно П.И. Адаптация метода аналитических сетей Саати для группового принятия решений // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2016, СПб, 25-27 мая 2016 г.). 2016. Т. 1. С. 38-41.

[2] Бурков Е.А., Любкин П.Л., Падерно П.И. Количественная оценка степени совпадения моделей объектов экспертизы // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2017, СПб, 24-26 мая 2017 г.). 2017. Т. 1. С. 73-76.

[3] Бурков Е.А., Падерно П.И. О корректности линейных преобразований экспертных оценок // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2018, СПб, 23-25 мая 2018 г.). 2018. Т. 1. С. 66-69.

[4] Бурков Е.А., Назаренко Н.А., Нассер С.С.С., Падерно П.И. Анализ корректности линейных преобразований экспертных оценок // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2019, СПб, 23-25 мая 2019 г.). 2019. Т. 1. С. 51-54.

[5] Дутова Е.Д., Назаренко Н.А., Падерно П.И. Анализ влияния технологии преобразования и комплексирования экспертных оценок на результат // Сборник докладов XIX-й Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям. Санкт-Петербург, 25–27 мая 2016 г. Том 1. С. 58-61.