

# Фазовый бифуркационный анализ нелинейных динамических систем

В. Ю. Островский<sup>1</sup>, А. В. Тутуева<sup>2</sup>, В. С. Андреев<sup>3</sup>, В. Г. Рыбин<sup>4</sup>  
Санкт Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)  
Санкт-Петербург, Россия  
<sup>1</sup>vyostrovskii@etu.ru, <sup>2</sup>avtutueva@etu.ru, <sup>3</sup>vsandreev@etu.ru, <sup>4</sup>vgrybin@etu.ru

**Аннотация.** В работе представлены фазовые бифуркационные диаграммы в качестве нового инструмента для анализа нелинейных динамических систем. Данные диаграммы основаны на визуализации интервалов между локальными максимумами переменной состояния системы, в то время как стандартный подход предполагает использование значений амплитуды. В качестве тестовой системы выбрана модель RCL-шунтированного джозефсоновского контакта, для которой мы демонстрируем отличительные особенности, которые можно увидеть только на интервальных диаграммах. За счет совместного применения амплитудных и фазовых бифуркационных диаграмм мы предлагаем подход к построению многопараметрических динамических карт путем решения задачи кластеризации. Результатами работы являются алгоритмы и программное обеспечение в среде LabVIEW для построения одномерных и многомерных бифуркационных диаграмм, применяемых в том числе при проектировании нейроморфных систем на базе перспективных нелинейных элементов.

**Ключевые слова:** бифуркационный анализ; нелинейная динамическая система; джозефсоновский контакт; кластеризация; машинное обучение

## I. ВВЕДЕНИЕ

Моделирование нелинейных динамических систем сопряжено с проявлениями детерминированного хаоса. Причиной его появления является неустойчивость по отношению к начальным условиям и параметрам. Выбор исследуемого диапазона изменения параметров системы является базовой задачей бифуркационного анализа, решение которой может быть затруднено несовершенством используемых графических инструментов. В первую очередь к ним относятся бифуркационные диаграммы, которые демонстрируют смену возможных динамических режимов системы при изменении исследуемого параметра. Классическим подходом к построению таких диаграмм является использование отображения Пуанкаре [1], однако с целью сокращения вычислительных затрат исследователи чаще прибегают к извлечению информации об экстремумах одной из переменных состояния системы. Так, в работе [2] мы осуществляли построение бифуркационных диаграмм на основе амплитудных значений, после чего с помощью алгоритмов оценки плотности распределения этих

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №19-07-00496

значений переходили к отрисовке двухпараметрических карт. На практике данный способ не всегда дает корректное решение: бифуркация удвоения периода с сохранением амплитуды колебаний может не отобразиться на таких диаграммах. Таким образом, необходима модификация данного подхода для учета подобных случаев. В данной работе наряду с амплитудными диаграммами мы рассматриваем фазовые бифуркационные диаграммы, использование которых призвано не заменить, но дополнить имеющийся инструментарий анализа нелинейных динамических систем. Переход к двухпараметрическим картам выполняется с помощью алгоритма кластеризации DBSCAN.

В качестве тестовой системы мы рассмотрим модель RCL-шунтированного джозефсоновского контакта, ранее изученную в работах [3, 4]. Подобно другим моделям электрических элементов с переключением сопротивления и цепей с ними, к примеру [5], данная система проявляет эффекты, связанные с мультистабильностью. Для отображения диапазона параметров таких режимов на динамической карте предложен подход на основе вычисления разницы между бифуркационными диаграммами и диаграммами прямого и обратного продолжения. Таким образом, целью работы является улучшение качества и информативности двухпараметрических динамических карт.

## II. RCL-ШУНТИРОВАННЫЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ КОНТАКТ

### A. Уравнения цепи

Эквивалентная схема модели RCL-шунтированного джозефсоновского контакта представлена на рис. 1.

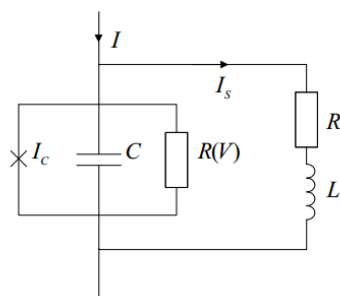


Рис. 1. Эквивалентная схема модели RCL-шунтированного джозефсоновского контакта

Схема состоит из двух параллельных ветвей: RC-части модели джозефсоновского контакта в середине и RL-шунта справа. Данная модель может быть описана следующим набором уравнений цепи:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\hbar}{2e} \frac{d\gamma}{dt} \\ I &= C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R(V)} + I_c \sin(\gamma) + I_s \\ V &= L \frac{dI_s}{dt} + I_s R_s \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\gamma$  является разностью фаз параметра сверхпроводящего порядка,  $I_c$  – критический ток,  $C$  – ёмкость и  $R(V)$  – нелинейное сопротивление контакта;  $L$  является индуктивностью,  $R_s$  – сопротивлением и  $I_s$  – током шунта.

### В. Уравнения системы

С использованием замен:  $x_1 = \gamma \bmod 2\pi$ ,  $x_2 = V / I_c R_s$ ,  $x_3 = I_s / I_c$  и  $\tau = 2e I_c R_s t / \hbar$ , уравнения (1) могут быть приведены к стандартной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{1}{\beta_C} (i - g x_2 - \sin(x_1) - x_3) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= \frac{1}{\beta_L} (x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\beta_C = 2e I_c R_s^2 C / \hbar$  является параметром МакКамбера-Стюарта,  $\beta_L = 2e I_c L / \hbar$  – безразмерная индуктивность,  $i = I / I_c$  – внешний ток смещения,  $g = R_s / R(V)$  – проводимость туннельного контакта. Сопротивление  $R(V)$  принимает значение  $R_N$  если  $|x_2| > V_g / (I_c R_s)$ , иначе  $R(V) = R_{sg}$ . В работе выбраны следующие параметры туннельного контакта:  $V_g / (I_c R_s) = 6.9$ ,  $R_s / R_N = 0.367$  и  $R_s / R_{sg} = 0.0478$ .

### III. ИНСТРУМЕНТЫ БИФУРКАЦИОННОГО АНАЛИЗА

Принцип извлечения данных для построения амплитудных и фазовых бифуркационных диаграмм графически представлен на рис. 2.

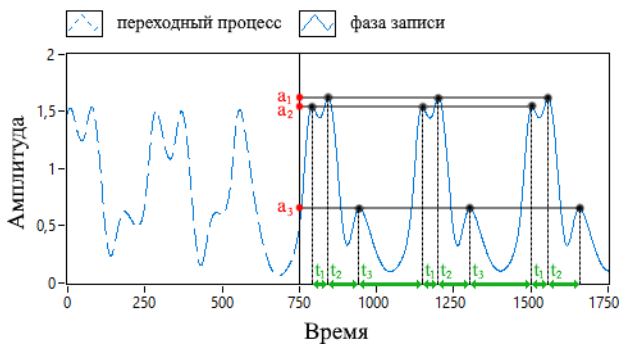


Рис. 2. Получение значений амплитуд  $a_1$ – $a_3$  и межпиковых интервалов  $t_1$ – $t_3$  от переменной состояния системы во временной области

Многочисленное моделирование динамической системы (2) для исследуемых диапазонов параметров было выполнено на основе численного метода решения ОДУ Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом  $h = 0.01$  в среде LabVIEW 2018. На рис. 3 (а) и (б) представлены две бифуркационные диаграммы, первая из которых построена на основе значений локальных максимумов, а вторая путем отображения межпиковых интервалов. В диапазоне параметра  $\beta_L$  от  $\sim 30.4$  до  $\sim 34.1$  можно наглядно видеть отличие в числе периодов предельного цикла – 1 против 2 соответственно на диаграммах (а) и (б). Кроме того, для первой диаграммы остается скрытой серия бифуркаций в диапазоне от  $\sim 29.6$  до  $\sim 28.3$  диаграмма (а) демонстрирует лучшее разделение ветвей многопериодного предельного цикла. Данные наблюдения нашли отражение в графиках рис. 3 (с), где амплитудная и фазовая информация была отдельно обработана алгоритмом ядерной оценки плотности KDE (см. [2, 6]). Оценка количества периодов, полученная алгоритмом кластеризации DBSCAN [7], оказалась наиболее точной, поскольку пространство признаков для него формируется на базе обеих диаграмм рис. 3 (а) и (б). Отметим также, что диапазон значений графика DBSCAN для хаотических режимов в разы превосходит такие от KDE. Данное свойство позволяет улучшить качество двухпараметрических динамических карт, примеры которых приведены на рис. 4.

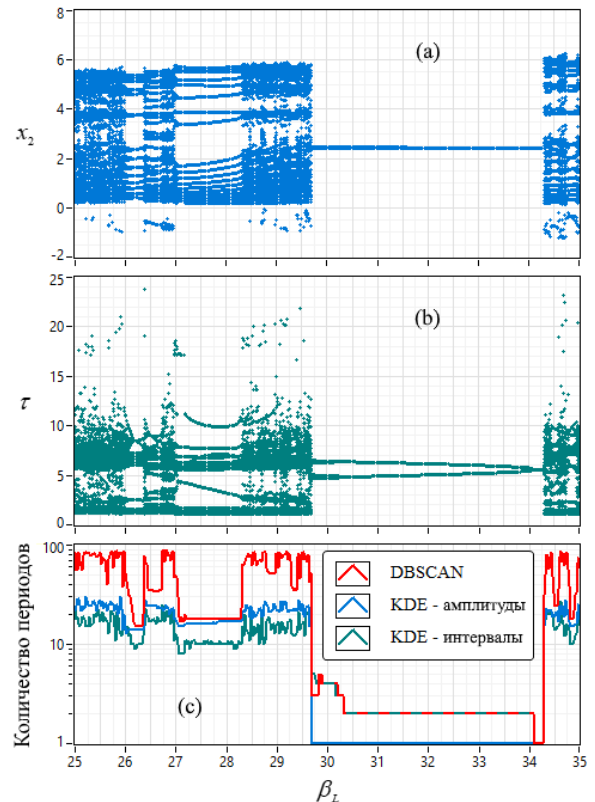


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы обратного продолжения (а) по амплитудным значениям и (б) по межпиковым интервалам переменной состояния  $x_2$  динамической системы (2) при  $\beta_C = 0.707$ ,  $i = 1.20$ , начальных условиях  $[0, 0, 0.1]$ , времени моделирования  $\tau = 400$  и отсекаемой длине переходного процесса  $\tau_0 = 300$ ; (с) графики расчетного количества периодов предельных циклов

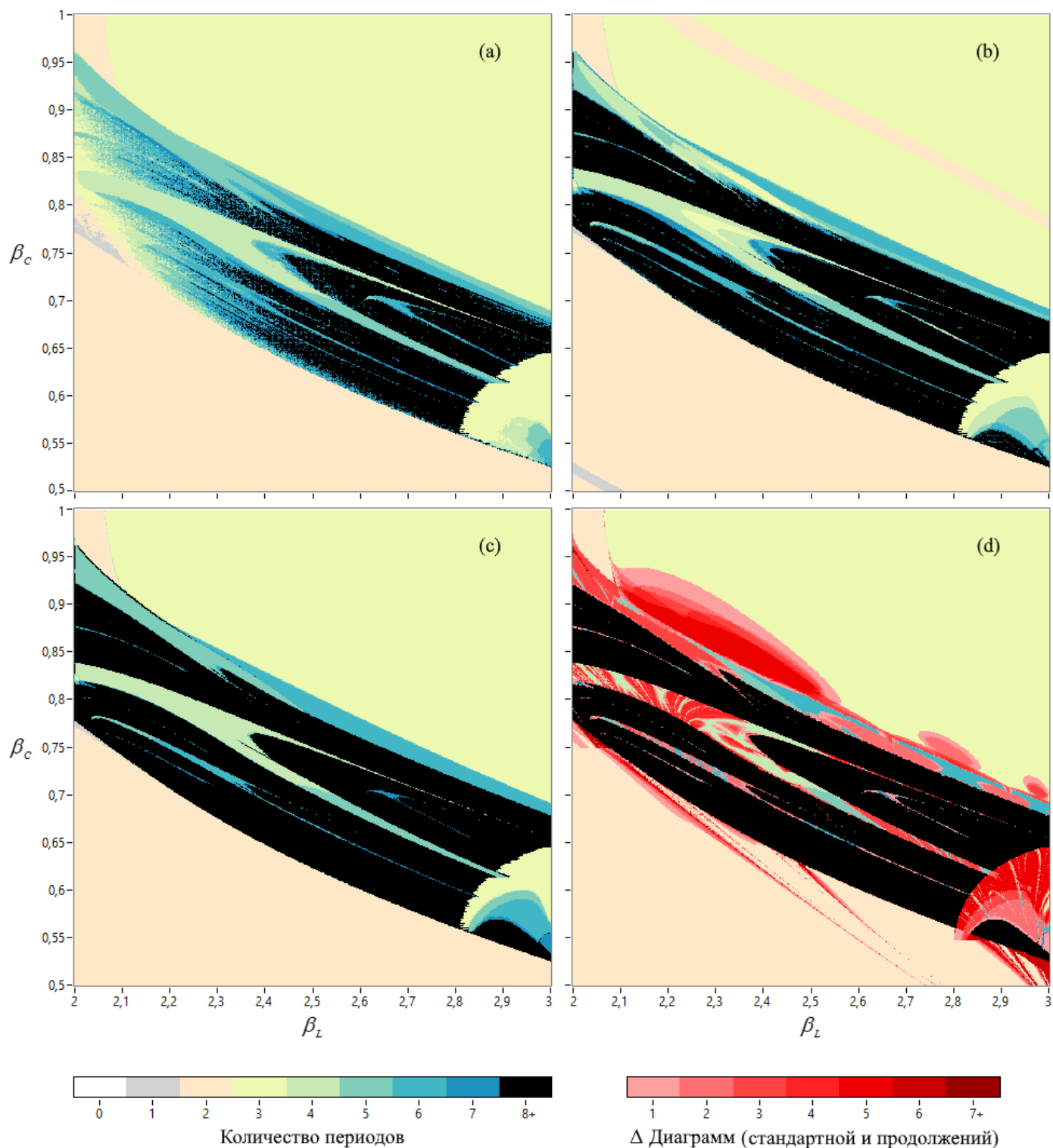


Рис. 4. Динамические карты системы (2) исходного разрешения 800x800 при  $i = 1.20$ , начальных условиях  $[3.14, -1, 1]$ , времени моделирования  $\tau = 300$  и отсекаемой длине переходного процесса  $\tau_0 = 50$ , построенные на базе: (a) алгоритма KDE – амплитудных значений при прямом продолжении; (b) алгоритма KDE – интервальных значений при прямом продолжении; (c) алгоритма DBSCAN при прямом продолжении; (d) алгоритма DBSCAN с учетом разницы между стандартной диаграммой и диаграммами прямого и обратного продолжения. Слева представлена цветовая схема, кодирующая периоды решений от 0 до 7. Решения с периодичностью 8 и более, включая хаотические, закрашены чёрным. Цветовая схема справа оттенками красного кодирует разницу между стандартной бифуркационной диаграммой и диаграммами продолжений. Данные участки содержат решения с длительными переходными процессами, возможно хаотическими, а также мультистабильностью.

Стандартным способом построения бифуркационных диаграмм является запуск процесса моделирования из фиксированной точки начальных условий. Бифуркационные диаграммы рис. 3 и динамические карты рис. 4 построены с применением продолжения решения: при переходе к новому значению параметра бифуркации начальными условиями выбирается последняя точка решения для текущего значения параметра. При этом отображения, получаемые при прямом и обратном варьировании параметра, в общем случае не эквивалентны друг другу. Таким образом, найдя разницу между тремя диаграммами (стандартной, прямого и обратного продолжения) можно определить диапазоны параметров, при которых система демонстрирует эффекты мультистабильности.

Рассмотрим динамические карты рис. 4. Приняв за эталон карту (с), можно видеть значительные отклонения в отображении динамических режимов высокой периодичности на карте (а), карта (б) демонстрирует видимые отклонения в виде диагональных полос в областях предельных циклов периода 2 и 3, а также некоторых других областях низкой периодичности. Относительное отклонение амплитудной карты от эталона составило 17.5%, интервальной – 10.1%. Площадь решений периодичности более 8 составило 23.3% эталонной карты, при этом амплитудная карта корректно отображает лишь 30.1% таких решений, в то время как интервальная карта сохраняет 83.2%. Таким образом можно судить о значительной роли фазовой составляющей в хаотических режимах системы (2). Разница стандартной динамической карты и карт продолжения (рис. 4 (d)) составила 16.9% от общей площади, исследованию устойчивости данных областей необходимо уделить особое внимание.

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование амплитудных бифуркационных диаграмм в отрыве от фазовых может в некоторых случаях привести к ошибочным результатам. Серия вычислительных экспериментов по построению бифуркационных диаграмм и двухпараметрических динамических карт для модели RCL-шунтированного

джозефсоновского контакта показала необходимость применения комбинированного подхода с использованием алгоритмов машинного обучения для решения задачи кластеризации. В настоящей работе для этой цели был реализован алгоритм DBSCAN, который позволил улучшить качество отображения динамических режимов.

Информативность динамических карт была улучшена за счет выделения областей, подверженных эффектам мультистабильности. Для этого мы использовали подход, основанный на вычислении разницы между стандартными бифуркационными диаграммами и диаграммами прямого и обратного продолжения.

Представленные инструменты являются частью комплекса автоматизации научных исследований в области нелинейной динамики. Результаты работы могут использоваться в процессе разработки наукоемких изделий, включая нейроморфные системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Thompson J.M.T., Stewart H.B. *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons, 2002. 458 p.
- [2] Comparing the algorithms of multiparametric bifurcation analysis / D.N. Butusov, V.Y. Ostrovskii, A.V. Tutueva, and A.O. Savelev // XX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM-2017), Saint Petersburg, Russia, May 24-26, 2017. pp. 194-198.
- [3] Whan C.B., Lobb C.J. Complex dynamical behavior in RCL-shunted Josephson tunnel junctions // *Physical Review E*. 1996. Vol. 53. №. 1. pp. 405-413.
- [4] Comparing the finite-difference schemes in the simulation of shunted Josephson junctions / V.Y. Ostrovskii, A.I. Karimov, V.G. Rybin, E.E. Kopets, and D.N. Butusov // *Proceedings of the 23<sup>rd</sup> Conference of Open Innovations Association FRUCT*, Bologna, Italy, November 13-16, 2018. pp. 300-305.
- [5] Buscarino A., Fortuna L., Frasca M., Gambuzza L.V. A chaotic circuit based on Hewlett-Packard memristor // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2012. Vol. 22. №. 2. pp. 023136.
- [6] Rudemo M. Empirical choice of histograms and kernel density estimators // *Scandinavian Journal of Statistics*. 1982. Vol. 9. №. 2. pp. 65-78.
- [7] A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise / M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, X. Xu. // *Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-96)* / AAAI Press, 1996. pp. 226-231.