

Симметричные меры дивергенции вероятностных распределений и идентификация систем

К. Р. Чернышев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Москва, Россия
myau@ipu.ru

Аннотация. Предложен метод построения симметричных мер дивергенции вероятностных распределений и соответствующих им симметричных мер зависимости случайных векторов. Такие меры строятся на основе энтропии Цаллиса произвольного порядка. Построенная таким образом мера дивергенции положена в основу подхода к идентификации стохастических систем по теоретико-информационным критериям.

Ключевые слова: дивергенция вероятностных распределений; идентификация стохастических систем; меры зависимости случайных векторов; теория информации; энтропия Цаллиса

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О МЕРАХ ДИВЕРГЕНЦИИ И ЗАВИСИМОСТИ

Традиционно решение задачи идентификации стохастических систем всегда подразумевает использование меры стохастической зависимости случайных величин как при представлении исследуемой системы на основе входо/выходного отображения, так и в рамках описания в пространстве состояний. Особенность метода, предложенного в работе, заключается в применении *состоятельных* мер зависимости. Следуя терминологии А.Н. Колмогорова, мера стохастической зависимости между двумя случайными величинами называется состоятельной, если она обращается в нуль тогда и только тогда, когда данные случайные величины являются стохастически независимыми [1].

Широкий класс мер зависимости строится с использованием соответствующих мер сравнения непрерывных многомерных вероятностных распределений, например, $g_1(\mathbf{z})$ и $g_2(\mathbf{z})$ k -мерного случайного вектора $\mathbf{Z}$, которые хорошо известны как меры дивергенции, среди которых дивергенция Кульбака-Лейблера является, очевидно, наиболее широко известной и применимой. В свою очередь, меры дивергенции можно рассматривать как критерии качества в рамках различных теоретических и практических задач. В частности, дивергенция Кульбака-Лейблера

$$D_{KL}(g_1 \| g_2) = \int_{R^k} g_1(\mathbf{z}) \ln \left(\frac{g_1(\mathbf{z})}{g_2(\mathbf{z})} \right) d\mathbf{z} \quad (1)$$

приводит к соответствующему выражению для взаимной информации Шеннона $I\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\}$ двух случайных векторов

$\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ размерностей k_1 и k_2 соответственно, когда одна плотность распределения вероятностей в (1), а именно $g_1(\mathbf{z}) = g_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$, является совместной плотностью распределения вероятностей этих случайных векторов, а вторая, $g_2(\mathbf{z}) = g_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{z}_1)g_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{z}_2)$, является произведением маргинальных плотностей распределения вероятностей $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$.

II. СИММЕТРИЧНАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ ЦАЛЛИСА И СИММЕТРИЧНАЯ ВЗАИМНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ЦАЛЛИСА

Как известно, взаимная информация Шеннона непосредственно связана с энтропией Шеннона. Между тем, существуют более общие подходы к определению энтропии случайной величины / вектора. Для k -мерного случайного вектора $\mathbf{Z}$, имеющего плотность распределения вероятностей $f(\mathbf{z})$, энтропия Цаллиса порядка α [2] определяется как

$$T_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \int_{R^k} (f(\mathbf{z}))^\alpha d\mathbf{z} \right), \alpha > 0, \alpha \neq 1. \quad (2)$$

Между тем, при стремлении α к 1, $T_\alpha(f)$ стремится к выражению, определяющему энтропию Шеннона, которую, таким образом, можно рассматривать как предельный случай энтропии Цаллиса «1-го порядка».

С вычислительной точки зрения, особенно при необходимости оценивания с использованием выборочных данных, энтропия Цаллиса считается более удобной для применения, чем энтропия Шеннона, поскольку последняя включает в себя «интеграл логарифма», обладающий определенной вычислительной сложностью, в то время как энтропия Цаллиса не содержит логарифм вообще. Между тем, выбор конкретной величины порядка α имеет важное значение, поскольку чем больше порядок, тем сложнее становятся вычисления.

Кроме того, энтропия Цаллиса обладает внутренним свойством, связанным с теорией функциональных пространств. Пусть в пространстве интегрируемых со степенью α неотрицательных функций $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in R^k$, норма определяется выражением

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_{R^k} (f(\mathbf{z}))^\alpha d\mathbf{z} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

известным как α -норма. Тогда, если $f(\mathbf{z})$ есть плотность распределения вероятностей случайного вектора $\mathbf{Z}$,

энтропия Цаллиса может быть явно выражена через ее α -норму как

$$T_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha-1} (1 - (\|f(\mathbf{z})\|_\alpha)^\alpha). \quad (3)$$

С другой стороны, рассматривая плотности распределения вероятностей в качестве векторов соответствующего гильбертова пространства интегрируемых α раз функций со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ двух векторов, заданного в виде интеграла от произведения соответствующих функций, можно впоследствии переписать выражения (2) и (3) с помощью цепочки следующих эквивалентных выражений

$$\begin{aligned} T_\alpha(f) &= \frac{1}{\alpha-1} (1 - (\|f(\mathbf{z})\|_\alpha)^\alpha) = \\ &= \frac{1}{\alpha-1} (1 - \int_{R^k} (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} d\mathbf{z}) = \\ &= \frac{1}{\alpha-1} (1 - \langle (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, последнее выражение в цепочке (4) позволяет интерпретировать энтропию Цаллиса порядка α плотности распределения вероятностей $f(\mathbf{z})$ как соответствующее аффинное преобразование скалярного квадрата функции $(f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}$.

Как прямое следствие, последнее позволяет рассмотреть возможность замены одной из плотностей $f(\mathbf{z})$ в скалярном произведении (4) другой плотностью распределения вероятностей, например, $g(\mathbf{z})$ из того же гильбертова пространства и в результате записать выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha-1} (1 - \langle (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle) &= \\ = \frac{1}{\alpha-1} (1 - \int_{R^k} (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2} d\mathbf{z}) &= T_\alpha(f, g), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} T_\alpha(f, g) &= \frac{1}{\alpha-1} (1 - \langle (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle) \geq \frac{1}{\alpha-1} (1 - \sqrt{\langle (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle \langle (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle}) \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{2} (\langle (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle + \langle (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle) \right) = \frac{1}{2} T_\alpha(f) + \frac{1}{2} T_\alpha(g), \quad \alpha > 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, применяя те же рассуждения для $0 < \alpha < 1$, «обратная» цепочка будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} T_\alpha(f, g) &= \frac{1}{\alpha-1} (1 - \langle (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle) \leq \frac{1}{\alpha-1} (1 - \sqrt{\langle (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle \langle (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle}) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{2} (\langle (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle + \langle (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2}, (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2} \rangle) \right) = \frac{1}{2} T_\alpha(f) + \frac{1}{2} T_\alpha(g), \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, выражения (7) и (8) подразумевают, что коэффициенты ν_{fg} , ν_f , ν_g в выражении (6) будут иметь в конечном итоге значения

$$\begin{cases} \nu_{fg} = 1, \nu_f = \nu_g = -\frac{1}{2}, & \alpha > 1 \\ \nu_{fg} = -1, \nu_f = \nu_g = \frac{1}{2}, & \alpha < 1 \end{cases} \quad (9)$$

Оба выражения (7) и (8) с помощью коэффициентов (9) могут быть приведены к следующему унифицированному выражению для плотностей распределения вероятностей:

$$D_\alpha^T(f\|g) = \frac{1}{2|\alpha-1|} \int_{R^k} ((f(\mathbf{z}))^{\alpha/2} - (g(\mathbf{z}))^{\alpha/2})^2 d\mathbf{z}. \quad (10)$$

которое естественно называть взаимной энтропией Цаллиса порядка α плотностей распределения вероятностей $g(\mathbf{z})$ и $f(\mathbf{z})$.

Именно взаимная энтропия Цаллиса $T_\alpha(g, f)$ в выражении (5) послужит в дальнейшем основой для построения соответствующей симметричной меры дивергенции $D_\alpha^T(f\|g)$ распределений вероятностей. А именно, $D_\alpha^T(f\|g)$ должна строиться в соответствии со следующими естественными условиями.

1) $D_\alpha^T(f\|g) \geq 0$ для любой $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ и любой плотности распределения вероятностей $f(\mathbf{z})$ и $g(\mathbf{z})$.

2) $D_\alpha^T(f\|g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(\mathbf{z}) \equiv g(\mathbf{z})$.

3) $D_\alpha^T(f\|g) = D_\alpha^T(g\|f)$.

Следует отметить, что последнее условие (симметрия) является значительным преимуществом по сравнению с дивергенцией Кульбака-Лайблера (1), которая не является симметричной. В то же время в полной аналогии с разложением дивергенции Кульбака-Лайблера по соответствующей сумме трех слагаемых естественно ожидать, что $D_\alpha^T(f\|g)$ будет иметь аналогичный вид, а именно:

$$D_\alpha^T(f\|g) = \nu_{fg} T_\alpha(f, g) + \nu_f T_\alpha(f) + \nu_g T_\alpha(g), \quad (6)$$

где ν_{fg} , ν_f , ν_g – некоторые нормализующие коэффициенты, выбранные для соответствия вышеуказанным условиям (1) – (3).

Между тем, с учетом представления (5), для порядка $\alpha > 1$ можно записать следующую цепочку:

Полученное таким образом выражение $D_\alpha^T(f\|g)$ естественно называть *симметричной* дивергенцией Цаллиса порядка α плотностей распределения вероятностей $f(\mathbf{z})$ и $g(\mathbf{z})$. Далее, поскольку вышеупомянутый случайный вектор $\mathbf{Z}$ можно рассматривать в форме конкатенации двух случайных векторов $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_2^T)^T$, где $\dim \mathbf{Z}_1 = k_1$ и $\dim \mathbf{Z}_2 = k_2$, его плотность распределения вероятностей $f(\mathbf{z})$ рассматривается как совместная плотность распределения вероятностей $f_{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ величин $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$. Одновременно, если в этих обозначениях плотность распределения вероятностей $g(\mathbf{z})$ рассматривается как произведение соответствующих маргинальных

плотностей $g_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{z}_1)$ и $g_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{z}_2)$ этих случайных векторов $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$, соответственно, то симметричная дивергенция Цаллиса

$$D_\alpha^T(f\|g) = D_\alpha^T(f_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}\|g_{\mathbf{z}_1}g_{\mathbf{z}_2})$$

$$I_\alpha^T(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \frac{1}{2^{|\alpha-1|}} \int_{R^{k_1}} \int_{R^{k_2}} \left((f_{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2))^{\alpha/2} - (g_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{z}_1)g_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{z}_2))^{\alpha/2} \right)^2 d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2. \quad (11)$$

III. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПО ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННОМУ КРИТЕРИЮ НА ОСНОВЕ СИММЕТРИЧНОЙ ВЗАИМНОЙ ИНФОРМАЦИИ ЦАЛЛИСА

Рассмотрим широко используемый в теории и практике идентификации класс нелинейных систем с дискретным временем, описываемых преобразованием, линейным по параметрам.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}}_{out}(t; \theta) &= \theta^T \mathbf{Z}_{inp}(t), \\ \theta &= (\theta_1, \dots, \theta_n)^T. \end{aligned} \quad (12)$$

Компоненты вектор-столбца $\mathbf{Z}_{inp}(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))^T$ являются некоторыми известными функциями предшествующих значений входного процесса системы, и, как правило, предшествующих значений выходного процесса системы. В рамках постановки задачи параметры модели, которые являются компонентами вектор-столбца θ , подлежат идентификации в соответствии с теоретико-информационным критерием.

$$I_\alpha^T(\mathbf{Z}_{out}(t), \hat{\mathbf{Z}}_{out}(t; \theta)) \rightarrow \sup, \quad (13)$$

с одновременной заменой аналитического выражения для симметричной взаимной информации Цаллиса $I_\alpha^T(\mathbf{Z}_{out}(t), \hat{\mathbf{Z}}_{out}(t; \theta))$ порядка α ее подходящей оценкой

$$\hat{f}_\alpha^T(\mathbf{z}_{out}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_{out}^{(N)}; \mathbf{z}_{inp}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_{inp}^{(N)}; \theta) = f(\theta) \quad (14)$$

полученной на основе наблюдений выборочных данных $\mathbf{z}_{inp}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_{inp}^{(N)}, \mathbf{z}_{out}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_{out}^{(N)}$ (обобщенных) входных, $\mathbf{Z}_{inp}(t)$, и выходных, $\mathbf{Z}_{out}(t)$, процессов системы. Здесь и далее верхний индекс (N) используется для соответствующей оценки функции по выборке длины N . В свою очередь, в выражении (14), $\mathbf{z}_{inp}^{(i)} = (z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)})^T$, $i = 1, \dots, N$.

Тогда в рамках данного подхода начальная задача идентификации модели стохастической системы (12) по информационно-теоретическому критерию (13), (14) при наличии выборочных значений входного и выходного процессов приводит к необходимости решения задачи конечномерной оптимизации

$$f(\theta) \rightarrow \sup. \quad (15)$$

Для решения задачи оптимизации (15) необходимо получить явное аналитическое выражение для функции $f(\theta)$ в выражении (14). В свою очередь, такой вывод основан на применении соответствующей методики оценки симметричной взаимной информации Цаллиса (11).

приобретает смысл меры зависимости случайных векторов $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$. Соответственно, такую меру зависимости естественно называть *симметричной взаимной информацией Цаллиса* $I_\alpha^T(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ порядка α случайных векторов $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$:

Пусть: $p_{SM}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ – плотность совместного распределения вероятностей выходных переменных системы, $\mathbf{Z}_{out}(t)$, и модели, $\hat{\mathbf{Z}}_{out}(t; \theta)$; $p_S(\mathbf{z}_1)$ – плотность частного распределения вероятностей выходной переменной системы $\mathbf{Z}_{out}(t)$; $p_M(\mathbf{z}_2)$ – плотность частного распределения вероятностей выходной переменной системы $\hat{\mathbf{Z}}_{out}(t; \theta)$.

В связи с условиями, налагаемыми на симметричную дивергенцию Цаллиса в разделе 2, соответствующая симметричная взаимная информация Цаллиса о выходной переменной системы $\mathbf{Z}_{out}(t)$ и выходной переменной модели $\hat{\mathbf{Z}}_{out}(t; \theta)$ выражается через их значения маргинальных и взаимных энтропий Цаллиса следующим образом (выражения (6), (9)):

$$\begin{aligned} I_\alpha^T(\mathbf{Z}_{out}(t), \hat{\mathbf{Z}}_{out}(t; \theta)) &= \\ &= v_{12} T_\alpha(p_{SM}, p_S \cdot p_M) + v_1 T_\alpha(p_{SM}) + v_2 T_\alpha(p_S \cdot p_M), \end{aligned}$$

где, в соответствии с выражениями (6), (9),

$$\begin{cases} v_{12} = 1, & c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}, & \alpha > 1 \\ v_{12} = -1, & c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, & \alpha < 1 \end{cases}. \quad (16)$$

Тогда, следуя подходу [3], предложенному в свое время для оценки взаимной информации Шеннона, получение оценки (14) симметричной взаимной информации Цаллиса $I_\alpha^T(\mathbf{Z}_{out}(t), \hat{\mathbf{Z}}_{out}(t; \theta))$, с использованием N пар выборочных данных по выходным и входным переменным, $\mathbf{Z}_{out}(t)$ и $\mathbf{Z}_{inp}(t)$, естественным образом основывается на применении следующих соотношений с использованием ядерных оценок соответствующих плотностей распределения вероятностей. Прежде всего, необходимо представить выражение (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{f}_\alpha^T(\mathbf{z}_{out}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_{out}^{(N)}; \mathbf{z}_{inp}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_{inp}^{(N)}; \theta) &= \\ &= v_{12} T_\alpha^{(N)}(p_{SM}, p_S \cdot p_M) + \\ &+ v_1 T_\alpha^{(N)}(p_{SM}) + v_2 T_\alpha^{(N)}(p_S \cdot p_M), \end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициенты v_{12} , v_1 , v_2 определяются выражением (16). В свою очередь, в (17)

$$T_\alpha^{(N)}(p_{SM}) = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (p_{SM}^{(N)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2))^\alpha d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 \right), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(N)}(p_S \cdot p_M) &= \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} (p_S^{(N)}(\mathbf{z}_1))^\alpha d\mathbf{z}_1 \int_{-\infty}^{\infty} (p_M^{(N)}(\mathbf{z}_2))^\alpha d\mathbf{z}_2 \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$T_{\alpha}^{(N)}(p_{SM}, p_S \cdot p_M) = \frac{1}{\alpha-1} \times \\ \times \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (p_{SM}^{(N)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) p_S^{(N)}(\mathbf{z}_1) p_M^{(N)}(\mathbf{z}_2))^{\alpha/2} d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 \right), \quad (20)$$

$$p_S^{(N)}(\mathbf{z}_1) = \frac{1}{N h_N} \sum_{i=1}^N K_1 \left(\frac{\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_{out}^{(i)}}{h_N} \right), \quad (21)$$

$$p_M^{(N)}(\mathbf{z}_2) = \frac{1}{N h_N} \sum_{i=1}^N K_2 \left(\frac{\mathbf{z}_2 - \theta^T \mathbf{z}_{inp}^{(i)}}{h_N} \right), \quad (22)$$

$$p_{SM}^{(N)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \\ = \frac{1}{N h_N^2} \sum_{i=1}^N K_1 \left(\frac{\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_{out}^{(i)}}{h_N} \right) K_2 \left(\frac{\mathbf{z}_2 - \theta^T \mathbf{z}_{inp}^{(i)}}{h_N} \right). \quad (23)$$

В выражениях (21)–(23) $\{h_N\}$ – убывающая к нулю последовательность положительных чисел; $K_j(\cdot)$, $j = 1, 2$ – положительно ограниченные ядра в R^1 , которые удовлетворяют обычным условиям при непараметрической оценке плотности ядра.

С учетом предположений, что $\mathbf{z}_{out}(t)$, $\hat{\mathbf{z}}_{out}(t; \theta)$ удовлетворяют условию сильного перемешивания, и при соответствующих условиях относительно интегрируемости, налагаемых на ядра $K_j(\cdot)$, $j = 1, 2$, и плотности $p_S(\mathbf{z}_1)$, $p_M(\mathbf{z}_2)$, $p_{SM}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ (формулы (3)–(7) в [3]), оценка (17) состоятельна в среднеквадратическом смысле. Между тем, следует отметить, что выражения (18)–(20) значительно проще, чем выражения, используемых в работе [3] для оценки энтропии Шеннона.

Таким образом, в конечном итоге требуемый критерий качества $f(\theta)$ теоретико-информационного вида, подлежащий максимизации по θ , определяется путем последующей подстановки выражений (18)–(23) в выражение (17).

Конечно, с аналитической точки зрения выражение (17) для функции $f(\theta)$ выглядит довольно сложным, при этом данная функция может иметь несколько локальных максимумов; поэтому естественным способом решения такой задачи оптимизации является применение

генетических алгоритмов, являющихся эффективным инструментом численной оптимизации функций.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель, которой следует данная работа, двойная. С одной стороны, была предложена симметричная мера дивергенции вероятностных распределений. При этом, данная мера строится на применении энтропии Цаллиса произвольного порядка α . С другой стороны, полученная таким образом симметричная мера дивергенции была применена для построения соответствующего теоретико-информационного критерия при постановке задачи идентификации систем.

Основная особенность представленного подхода заключается в применении именно состоятельной меры зависимости случайных величин в качестве критерия идентификации совместно с конструктивным методом его оптимизации, что не предполагает использования специальных знаний о вероятностных характеристиках переменных системы. В свою очередь, состоятельность меры зависимости в качестве предлагаемого теоретико-информационного критерия обеспечивает исчерпывающий учет идентифицируемости системы, которая понимается как возможность выявления и количественного описания взаимосвязи между входными и выходными переменными системы. Последнее эквивалентно невозможности получения модели системы в том и только в том случае, если этот теоретико-информационный критерий обращается в нуль, что явно указывает на взаимную стохастическую независимость входных и выходных переменных исследуемой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сарманов О.В., Захаров В.К. Меры зависимости между случайными величинами и спектры стохастических ядер и матриц // Математический сборник. 1960. Т. 52(94), № 4. С. 953–990.
- [2] Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer Science+Business Media, 2009. 388 p.
- [3] Mokkadem A. Estimation of the entropy and information of absolutely continuous random variables // IEEE Transactions on Information Theory. 1989. Vol. IT-35. P. 193–196.