

Разработка компьютерной модели неустановившейся фильтрации газа с учетом неоднородности фильтрационных свойств пласта

Д. Д. Сирота

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
Санкт-Петербург, Россия
sdd.spb@outlook.com

Аннотация. В настоящей работе представлены учитывающие пространственную неоднородность фильтрационных свойств модели процессов фильтрации газа в виде дифференциальных уравнений в частных производных, численная модель, использующая неявную конечно-разностную схему, и применен метод конечных объемов. С использованием полученных моделей было разработано программное обеспечение, позволяющее производить моделирование для двумерного случая нестационарной фильтрации газа, учитывающее влияние скважин и неоднородность пласта.

Ключевые слова: компьютерное моделирование; газовые скважины; интерференция скважин; метод конечных объемов; моделирование пластов; неоднородность фильтрационных свойств

I. ВВЕДЕНИЕ

Текущая разработка ведется с целью получения компьютерной модели неустановившейся фильтрации газа в пласте, в рамках создания математической модели (ММ) единого управляемого газодобывающего комплекса. Использование ММ, основанных на фундаментальных законах сохранения массы, импульса, энергии, позволяет управлять разработкой месторождений, подбирая такие режимы эксплуатации, при которых снижаются риски возникновения и развития осложнений, а также повышаются коэффициенты извлечения углеводородов. При создании динамических моделей можно исследовать пласт более детально за счет разбиения его на блоки и применения к каждому из них уравнений фильтрации, что позволяет моделировать нестационарные процессы в пласте. Имеющиеся для этой цели пакеты программ (Eclipse, Tempest и др.[1, 2]) имеют высокую стоимость, требуют ежегодного обновления лицензии, и главное, выполнены в виде «черного ящика». В результате чего, отсутствует возможность корректировать программное обеспечение с целью создания моделей управляемых (и даже неуправляемых) процессов и разработки систем, базирующихся, в том числе, на современных методах и технологиях управления. Таким образом, возникает необходимость разработки математических и компьютерных моделей процессов фильтрации в пласте, а

также программного обеспечения численного моделирования.

Современная теория управления предлагает множество высокоэффективных методов, не ограничиваясь только простейшими регуляторами. Поэтому важной характеристикой программного обеспечения является возможность работы в режиме реального времени. Основные задачи данной работы:

- разработка численной модели нестационарной фильтрации газа, учитывающей неоднородность фильтрационных свойств пласта;
- реализация компьютерной модели (симулятор) с учетом усовершенствованной численной модели.

II. ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ

Основной формой пластовой энергии, обеспечивающей приток газа к скважинам, является энергия упругой деформации газа и твердого скелета пласта [3]. ММ неустановившейся фильтрации газа в деформируемой пористой среде, при допущениях, что проницаемость и вязкость постоянны, формируется путем подстановки закона сохранения импульса (в виде закона фильтрации Дарси) в уравнение неразрывности потока [3]. Тогда уравнение неразрывности потока и закон Дарси, соответственно:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z},$$
$$w = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

где p – давление, t – время, ϕ – пористость, k – проницаемость, μ – вязкость, ρ – плотность газа, w – скорость фильтрации.

В результате математическая модель неустановившейся фильтрации газа имеет вид [4]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \quad \kappa = \frac{k}{\mu(\beta_n + \phi\beta_r)}, \quad (1)$$

$$\beta_n = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial p}, \quad \beta_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p},$$

где κ – коэффициент пьезопроводности, β_n , β_r – коэффициенты сжимаемости породы и газа соответственно.

Если в начальный момент пласт не возмущен, то начальное условие при $t = 0$ имеет вид $p = p_0 = \text{const}$. Возможны следующие граничные условия внешней границы пласта – постоянное давление $p_B = \text{const}$, постоянный переток через границу при выполнении закона Дарси: $w_B = \text{const}$.

Уравнение (1) – основное уравнение теории упругого режима фильтрации. Коэффициент κ характеризует скорость перераспределения пластового давления при неустановившейся фильтрации упругого флюида в упругой пористой среде.

А. Разработка численной модели неустановившейся фильтрации для одномерного случая

Преобразуем уравнение фильтрации конечными разностями, используя неявную схему, так как неявные схемы обладают повышенными свойствами устойчивости по сравнению с явными, хотя и уступают им в быстродействии. Рассмотрим одномерный пласт длиной L , разделенный на N пространственных блоков – конечных объемов, с использованием блочно-центрированной схемы (узлы сетки располагаются в центрах блоков). Введем временной шаг Δt и количество временных слоев T . Решение отыскивается только на дискретных временных слоях $n\Delta t$. В результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получается следующая система линейных алгебраических уравнений [5]:

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = \kappa \frac{p_{i-1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2},$$

$$i = [1, 2, \dots, N], \quad n = [1, 2, \dots, T],$$

где i – номер узла сетки, n – номер временного слоя.

Вынесем временную и пространственную составляющие в виде отдельного множителя:

$$\eta = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Тогда уравнение одномерной фильтрации примет более удобный для расчетов вид:

$$-\eta p_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\eta) p_i^{n+1} - \eta p_{i+1}^{n+1} = p_i^n,$$

$$i = [1, 2, \dots, N], \quad n = [1, 2, \dots, T].$$

Система уравнений для блоков в матричной форме:

$$(\mathbf{I} + \eta \mathbf{A}) \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n, \quad (2)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов системы уравнений. Конечно-разностные соотношения частных производных компонентов закона фильтрации, представленные выше, составлены относительно давления. Однако, в случаях моделирования пласта с учетом скважин, более предпочтительной является запись применительно к расходу. Чтобы преобразовать к нужному виду уравнение фильтрации, умножим обе части системы уравнений на следующее соотношение:

$$\frac{S \Delta x \phi c_t}{B_w \Delta t} = \frac{V \phi c_t}{B_w \Delta t},$$

где S , V – площадь и объем блока соответственно, B_w – объемный коэффициент флюида, c_t – сжимаемость.

Для удобства, введем соответствующие переменные для блоков:

$$B_i = \frac{V \phi c_t}{B_w}, \quad T_i = \frac{kS}{\mu B_w \Delta x}.$$

В этих выражениях T и B обладают физическим смыслом. Коэффициент B отражает емкостные свойства блока, а T (проводимость) – фильтрационные. Для системы уравнений одномерной фильтрации матрица проводимости является трёхдиагональной. Система уравнений (2), приведенная к единицам расхода, с учетом граничных условий [6]:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T(1+2\omega_1) & -T & 0 & 0 \\ -T & 2T & -T & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & -T & T(1+2\omega_2) \end{pmatrix} \right] \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_N \end{pmatrix} \mathbf{p}^n + \mathbf{Q},$$

$$\omega = \begin{cases} 0, & \text{если граничные условия Неймана (2 рода)} \\ 1, & \text{если граничные условия Дирихле (1 рода)} \end{cases}$$

где p_{B1} , p_{B2} – давления для соответствующих граничных условий.

В итоге векторно-матричная запись конечно-разностного уравнения фильтрации запишется как

$$\left(\mathbf{T} + \frac{\mathbf{B}}{\Delta t}\right) \mathbf{p}^{n+1} = \frac{\mathbf{B}}{\Delta t} \mathbf{p}^n + \mathbf{Q}, \quad (3)$$

где $\mathbf{Q}$ – расход флюида в блоке в результате действия источников/стоков (скважин).

В. Разработка численной модели неустановившейся фильтрации для двумерного случая

Рассмотрим двумерный пласт длиной L и шириной W (рис. 1). Дискретизация по пространству выполняется путем разбиения моделируемой области на NX и NY узлов. Суммарное число блоков составляет $N = NX \times NY$. Каждый конечный объем обозначается индексами i и j . Вместе с тем, возможна нумерация блоков одним целочисленным индексом, что является удобным при разработке алгоритмов для компьютерной модели. В данной работе принята нумерация пространственных блоков, в соответствии с соотношением: $L = (j-1)NX + i$ [4].

$j=NY=3$	9	10	11	12
$j=2$	5	6	7	8
$j=1$	1	2	3	4
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=NX=4$

Рис. 1. Продуктивный пласт, дискретизированный по пространству с использованием L – нумерации

В случае двумерной фильтрации, каждый блок взаимодействует с двумя, тремя или четырьмя соседними блоками, что определяет вид матрицы проводимостей.

В качестве примера, рассмотрим вид матрицы $\mathbf{T}$ для системы из рис. 1, при непроницаемых границах пласта (граничные условия 2 рода) и отсутствии скважин:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2T & -T & & & & & \\ -T & 3T & -T & & & & \\ & -T & 3T & -T & & & \\ & & -T & 2T & & & \\ -T & & & & 3T & -T & \\ & -T & & & -T & 4T & -T \\ & & -T & & & -T & 4T \\ & & & -T & & & -T & 3T \\ & & & & -T & & & 2T & -T \\ & & & & & -T & & -T & 3T & -T \\ & & & & & & -T & & -T & 3T & -T \\ & & & & & & & -T & & -T & 2T \end{pmatrix}$$

Таким образом, при использовании L -нумерации, матрица проводимостей является пятидиагональной. В

остальном, система уравнений для двумерного случая аналогична системе (3).

III. РАЗРАБОТКА КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ

А. Интерпретация работы скважин

В рамках данной работы рассматривается случай однофазной фильтрации газа, при допущениях, что продуктивный пласт, вскрывается совершенными скважинами с вертикальным окончанием, которые интерпретируются как внутренние границы пласта. Моделируемые скважины располагаются в центре блока. В пластовых симуляторах наиболее распространены два типа граничных условий (не считая смешанных): в виде заданного давления на забое (граничные условия 1 рода) или в виде заданного дебита скважины (граничные условия 2 рода). При такой постановке возможен расчет забойного давления, при заданном дебите и наоборот – расчет дебита, при заданном забойном давлении в зависимости от времени. Существует несколько связывающих соотношений для расчета неизвестных: модель Ван-Полен, модель Писмана и модель Абу-Кассема и Азиза. В настоящее время модель Ван-Полен почти не используется [6], а модель Абу-Кассема и Азиза удобна для расчетов при расположении скважин не в центре блоков. Поэтому, для учета скважин в данной работе используется модель Писмана, которая хорошо подходит для расчетов в блочно-центрированных сетках. Согласно данной модели радиус, при котором давление в блоке со скважиной соответствует средневзвешенному давлению в пласте (эквивалентный радиус) для случая квадратной сетки, задается следующим соотношением:

$$r_{eq} = 0,2\Delta x.$$

Чтобы перейти к расчету забойного давления добывающей скважины, работающей в режиме постоянного расхода, используется следующее соотношение [6]:

$$P_{заб} = P_L - \frac{q_{скв} \mu B}{2\pi kh} \ln \left(\frac{0,2\Delta x}{r_{скв}} \right) = P_L - \frac{q_{скв}}{J_{скв}}$$

где J – коэффициент продуктивности скважины, $r_{скв}$ – радиус скважины, P_L – средневзвешенное давление в блоке.

В. Усовершенствованная компьютерная модель

Ранее, нами в [7] была разработана численная модель и реализована компьютерная модель на языке программирования Python. Расчеты, выполняемые данной моделью, выполнялись при допущениях, что фильтрационные свойства одинаковы на всей площади моделируемого пласта.

В настоящей работе представлена модель, учитывающая пространственную изменчивость проницаемости моделируемого пласта, что позволяет точнее отражать протекание физических процессов, хотя и

несколько усложняет саму модель. При снятии допущений о пространственной однородности проницаемости, возникают технические трудности, связанные с тем, что значения проводимостей T определяются на границах ячеек сетки (блоков), а значения проницаемости k отнесены только к центрам ячеек расчетной сетки. Существуют методы осреднения показателей того или иного свойства между соседними блоками. Ввиду того, что проницаемость k может значительно варьироваться (например, при наличии непроницаемых включений), для вычисления средних величин между соседними блоками наиболее подходит среднее гармоническое. Тогда расчет проницаемости на границе ячеек будет иметь вид:

$$k_{L+1/2} = 2 \left(\frac{1}{k_{L+1}} + \frac{1}{k_L} \right),$$

где $k_{L+1/2}$ – проницаемость на границе блоков с индексами L и $L+1$.

Таким образом, решаемая симулятором задача математически сводится к аппроксимации дифференциальных уравнений двумерной неуставившейся фильтрации (трёхмерность реальных месторождений учитывается введением мощности пласта). Координаты и расходы скважин, начальные и граничные условия, пластовые свойства и параметры флюида задаются в исходных данных. Решение находится с помощью метода сопряженных градиентов, так как данный метод показал наибольшую эффективность в сравнении с прямым методом (LU-декомпозиция) и другими итерационными методами [7].

Выходными данными являются вычисленные значения давления в блоках с первым порядком точности по времени и вторым порядком точности по пространственной координате. Модель учитывает пространственную неоднородность фильтрационных свойств, взаимное влияние скважин и рассчитывает давления на забое скважин в зависимости от времени.

В качестве исходных данных по части параметров флюида и породы-коллектора для вычислительного эксперимента использовались промысловые данные одного из объектов разработки существующего газового месторождения. Проницаемость задана в виде массива случайных чисел в диапазоне от 29 до 129 мД.

ТАБЛИЦА I Исходные данные для моделирования

Параметр	Значение
Длина пласта (м)	3000
Ширина пласта (м)	3000
Высота пласта (м)	20
Пористость (д. ед.)	0,2
Проницаемость коллектора (м ²)	29 – 129 · 10 ⁻¹⁵
Начальное давление (Па)	7 · 10 ⁶
Вязкость газа (Па·с)	2 · 10 ⁻⁵
Координаты (x ; y) добывающей скважины №1 (м)	(1200; 1500)
Координаты (x ; y) добывающей скважины №2 (м)	(1800; 1500)
Расход газа в добывающей скважине №1 (м ³ /сут)	480 · 10 ³
Расход газа в добывающей скважине №2 (м ³ /сут)	480 · 10 ³

Скважины вскрывают пласт полностью и пускаются в работу одновременно. Пласт дискретизирован по пространственной координате на 40401 блоков (201 x 201 узел). Конечное время моделирования – 360 сут с шагом в 1 сут. Полученные результаты моделирования процессов представлены на рис. 2–3.

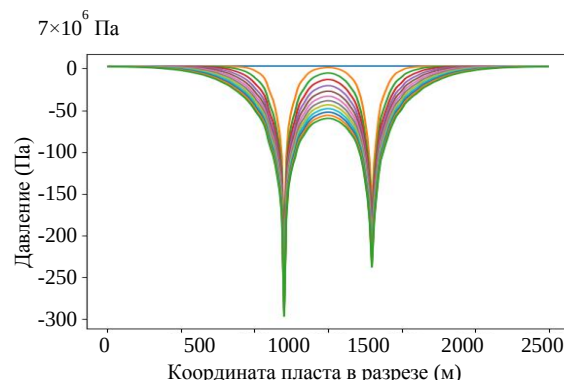


Рис. 2. Распределение давления в пласте на конечное время моделирования

На рис. 2 представлено распределение давления в пласте в разрезе вдоль линии расположения скважин. Каждая линия соответствует временному интервалу, равному 30 сут. Как видно, неоднородность фильтрационных свойств оказывает значительное влияние на изменение давления в моделируемом пласте.

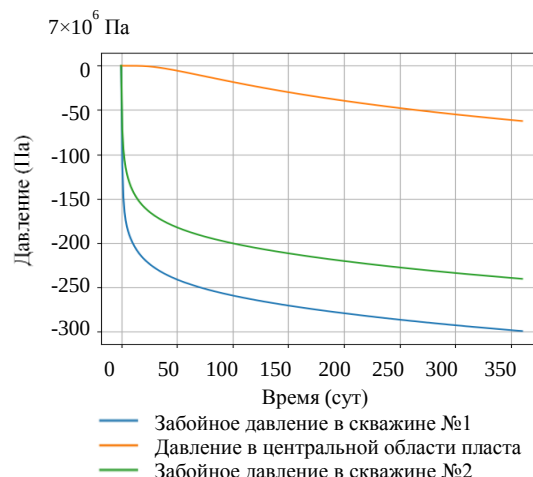


Рис. 3. Давление на забоях скважин и центральной точке пласта в зависимости от времени

Результаты моделирования показали, что в заданном пласте, несмотря на одинаковые расходы у двух добывающих скважин, снижение забойного давления у скважины №1 происходило интенсивнее, ввиду разных фильтрационными свойств в каждом отдельном блоке.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При управлении разработкой месторождений газа, в качестве управляющих воздействий можно рассматривать расходы добывающих скважин. Полученная компьютерная программа-симулятор, при заданных значениях параметров пласта, флюида и расхода газа на выходе из

скважин, рассчитывает распределение поля давления двумерном пласте в зависимости от времени, учитывая изменения забойных давлений скважин и пространственную неоднородность фильтрационных свойств. Реализованные в симуляторе алгоритмы расчета показали высокую эффективность метода сопряженных градиентов, что делает возможным применение данной модели для целей синтеза системы управления газодобывающим комплексом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] ECLIPSE Industry-Reference Reservoir Simulator. URL: <https://www.software.slb.com/products/eclipse>
- [2] Roxar Tempest. URL: <http://roxar.ru/software/tempest>
- [3] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.
- [4] Куштанова Г.Г. Подземная гидромеханика. Казань: Изд-во Казан. (Приволж.) федер. ун-та, 2010. 67 с.
- [5] Алишаев М.Г. Моделирование и расчёт в прикладной механике и добыче нефти. Махачкала: Изд-во АЛЕН, 2015. 288 с.
- [6] Эртекин Т., Абу-Кассем Дж., Кинг Г. Основы прикладного моделирования пластов. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 1060 с.
- [7] Абрамкин С.Е., Душин С.Е., Сирота Д.Д. Моделирование интерференции газовых скважин с применением метода конечных объемов // III Международная научная конференция по проблемам управления в технических системах (ПУТС-2019).