Метрологический подход к решению нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

А. А. Целищева[1], К. К. Семенов[2]
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Санкт-Петербург, Россия
[1]tselishcheva.a.a@gmail.com, [2]semenov.k.k@gmail.com

Аннотация. **Данная статья посвящена такому подходу к решению нелинейных уравнений и их систем, возникающих при выполнении косвенных измерений, который в полной мере удовлетворяет метрологическим требованиям к их результатам. Метод основан на последовательном использовании бисекции и обеспечивает получение строго достоверных оценок искомого решения уравнений и их неопределенности. На каждой итерации по уточнению этих оценок результат выдается в виде интервала, который гарантированно содержит все возможные значения корня или решения системы, как и требуется от результата измерений. Если даже итерационный процесс будет преждевременно прерван, результат косвенного измерения все равно будет получен, но границы соответствующей интервальной оценки будут шире, чем могли быть.**

Ключевые слова: неточные данные; нелинейные уравнения; решение уравнений; интервальная бисекция; косвенные измерения

I. Введение

Значения многих физических величин могут быть получены только с применением косвенных измерений. Для получения их результатов выполняют прямые измерения величин, находящихся в функциональной зависимости с искомой величиной, выраженной обычно в виде уравнения или системы уравнений, зачастую нелинейных. С математической точки зрения для определения интересующего значения требуется найти корень или решение соответствующих уравнений косвенных измерений. Данная операция осуществляется в вычислительном блоке измерительной системы, в котором для этого реализована специальная программная процедура. Выполняемое ею решение уравнения или системы уравнений трактуется как измерительное преобразование, направленное на получение результата косвенных измерений. Если нет возможности осуществить поверку всей измерительной системы в целом, данное метрологически значимое программное обеспечение должно быть подвергнуто отдельному метрологическому контролю. Осуществить последнее – почти нерешаемая задача, поскольку обеспечить надежное нормирование точностных характеристик для любых выдаваемых результатов достаточно сложных вычислений практически невозможно. Для этого необходимо было бы рассмотреть многочисленные возможные варианты исходных данных выполняемых расчетов, в качестве которых выступают результаты прямых измерений. Трудоемкость этой операции чрезвычайно высока. Обойти данное препятствие можно, если использовать идею метрологического автосопровождения [1, 2], которая предписывает переложить необходимые действия по оценке пределов возможной погрешности результатов вычислений с результатами прямых измерений на само программное обеспечение. В настоящей статье предложена простая реализация данного принципа для задачи решения уравнений косвенных измерений. Основным источником неопределенности в этом случае являются коэффициенты уравнений, так как они связаны со значениями результатов прямых измерений. Обычно для решения подобных задач на практике используются различные итерационные методы. Оценку корня уравнения или решения системы уравнений ведут до тех пор, пока не будет достигнута необходимая вычислительная точность. При этом нередко погрешности параметров уравнений, обусловленные результатами прямых измерений, не учитываются, что, безусловно, приводит к искажению результатов.

Данная работа посвящена такому методу решения как отдельных уравнений косвенных измерений, так и их систем, который позволяет обеспечить получаемые результаты индивидуальными характеристиками погрешности в полном соответствии с требованиями обеспечения единства измерений.

II. Метрологически обоснованное решение нелинейных уравнений

Целью любого измерения является получение оценки истинного значения измеряемой величины с требуемой точностью. К достигаемым результатам метрологические нормативные документы предъявляют ряд требований. Согласно закону «Об обеспечении единства измерений» [3] результат выполненных измерений (в том числе и косвенных) должен быть в обязательном порядке сопровожден характеристикой его предельно возможной погрешности. При итерационном характере формирования результата измерений это может значить следующее.

Если процедура решения уравнения косвенных измерений входит в состав метрологически значимого программного обеспечения средства измерения (или измерительной системы), то процедура поверки данного средства измерений фактически включает в себя и аттестацию соответствующей программы. Выдаваемый результат измерения сравнивается с образцовым значением измеряемой величины, поданным на вход

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №19-31-90165

средству измерения, или с результатом измерения, полученным образцовым измерительным прибором. Соответственно погрешности определения корня уравнения или решения системы уравнений косвенных измерений оказываются включены в состав общей оценки погрешности результата. Если итерационный процесс вычисления корня или решения системы в ходе поверочных процедур не сойдется или окажется преждевременно прекращенным, то это может привести к получению недостоверной оценки измеряемого значения и ухудшению оценок точности средства измерения. При этом возможно, что результат измерения не будет получен в принципе, если соответствующая процедура поиска разойдется, а используемое программное обеспечение не отследит данное обстоятельство.

В случае, когда при решении одного или нескольких уравнений косвенных измерений в качестве их коэффициентов используются значения, получаемые по результатам прямых измерений сразу нескольких величин, то при аттестации соответствующего метрологически значимого программного обеспечения возникает сложность, которая заключается в необходимости определения исчерпывающего набора сочетаний значений величин, измеряемых напрямую, который позволил бы обеспечить надлежащий метрологический контроль и контроль сходимости [4, 5]. Авторы работы полагают, что вместо подобного избыточного нормирования целесообразно сопроводить процедуру поиска решения уравнений косвенных измерений функцией оценки его погрешности, вызванной неточностью коэффициентов решаемых уравнений. Поскольку процесс решения носит итерационный характер и может быть прерван раньше, чем нужно по условию остановки, заданному из соображений сходимости или иных соображений вычислительного плана (из-за сбоев, прекращения питания вычислительного элемента и т.д.), то важно, чтобы результат каждой промежуточной итерации сопровождался подобной оценкой точности. В противном случае становится возможным, что процедура будет прервана, но ни оценки решения уравнения косвенных измерений, ни оценки его погрешности получено не будет.

Важно отметить, что если итерационный процесс поиска корня уравнения или решения системы уравнений окажется затянут (например, из-за неправильного выбора правила остановки), то итоговая предельная погрешность оценки результата косвенных измерений может оказаться больше, чем если бы итерационный процесс был остановлен раньше (при сохранении достоверности). Кроме того, нет смысла определять слишком большое количество значащих цифр для корня уравнения или решения системы уравнений косвенных измерений, поскольку в соответствии с требованиями метрологии итоговый результат измерения и характеристика его предельной погрешности будут подвергнуты округлению.

Перечисленные соображения указывают на целесообразность применения интервальных методов для решения метрологически значимых уравнений. Так, модификации метода бисеции, представленные в работах [6, 7] обеспечивают соответствие указанным требованиям и достижение необходимых свойств. Из их недостатков можно назвать лишь возможное удлинение времени вычислений (в силу линейной скорости сходимости дихотомии). При этом следует принять во внимание, что если время, затрачиваемое на формирование результатов измерений в каналах прямых измерений, существенно больше времени, затрачиваемого на математическую обработку в микроконтроллере или микропроцессоре для получения результата косвенных измерений, то упомянутым удлинением расчетов, вызванных использованием бисекции, можно спокойно пренебречь.

III. Интервальная бисекция для отдельного уравнения

В работе [6] представлена такая модификация метода бисекции для поиска корней нелинейных уравнений косвенных измерений, которая позволяет гарантированно их получить вместе с надежными оценками погрешности, обусловленными неточностью коэффициентов решаемых уравнений. Далее кратко описана суть этого подхода, отвечающего всем требованиям, перечисленным в предыдущем пункте статьи.

Пусть уравнение $f(x, \mathbf{p}) = 0$ служит для получения результата косвенных измерений x по результатам прямых измерений (коэффициентов $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$). Пусть также из общих сведений об измерительной ситуации задан такой интервал $I_1 = [a_1, b_1]$, в котором искомый корень с гарантией содержится. Для применения метода интервальной бисекции необходимо выполнение условий монотонности функции f на интервале I_1, что обычно имеет место в метрологических задачах. Алгоритм интервальной бисекции разделен на две части: в первой части применяется обычный метод бисекции до тех пор, пока он применим для уравнений с неточными коэффициентами, во второй – происходит дальнейшее уточнение границ интервала возможных значений корня.

В первой части алгоритма на каждом шаге $i = 1, 2, \ldots$ определяется значение середины текущего интервала I_i, в котором ведется поиск корня: $c_i = (a_i + b_i)/2$. Поскольку известно, что данный интервал точно содержит искомый корень, а функция f – монотонна по x, то возникает возможность для уточнения области нахождения корня: если оказывается, что $f(a_i, \mathbf{p}) \cdot f(c_i, \mathbf{p}) < 0$, то корень содержится в левой половине интервала I_i и тогда $I_{i+1} = [a_i, c_i]$, в противном случае же $I_{i+1} = [c_i, b_i]$.

Вместе со значением $f(c_i, \mathbf{p})$ также вычисляется оценка предельной погрешности значения функции в середине интервала $\Delta f(c_i, \mathbf{p})$, например, следующим образом: $\Delta f(c_i, \mathbf{p}) = |\partial f(c_i, \mathbf{p})/\partial p_1| \cdot \Delta p_1 + \ldots + |\partial f(c_i, \mathbf{p})/\partial p_m| \cdot \Delta p_m$, где Δp_j – предел абсолютной погрешности коэффициента p_j решаемого уравнения. Для определения значений частных производных рекомендован алгоритм автоматического дифференцирования функций, заданных программой [8].

Если окажется, что $|f(c_i, \mathbf{p})| < \Delta f(c_i, \mathbf{p})$, то это означает, что нет возможности точно определить знак значения $f(c_i, \mathbf{p})$ и выбрать ту часть интервала I_i, в которой содержится искомый корень. В этом случае осуществляется переход ко второй части алгоритма. Рис. 1 иллюстрирует подобную ситуацию, когда из-за неточности коэффициентов решаемого уравнения нельзя определить, какая часть интервала I_i должна быть отброшена.

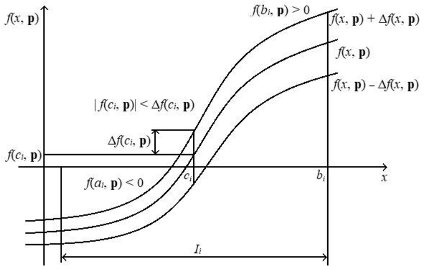

Рис. 1. Момент перехода от первой ко второй части алгоритма интервальной бисекции

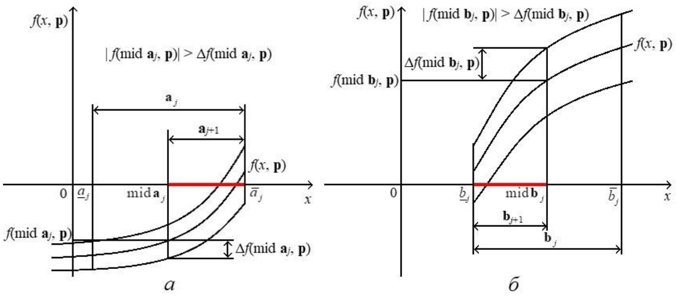

Рис. 2. Одна итерация уточнения (а) нижней границы **a** и (б) верхней границы **b** множества возможных значений корня во второй части алгоритма интервальной бисекции

Пусть первая часть алгоритма интервальной бисекции завершилось получением интервала I_{lim}. Во второй части алгоритма происходит уточнение по отдельности левой и правой границы интервала возможных значений корня. По сути дела происходит поиск таких значений x, при которых $|f(x, \mathbf{p})| < \Delta f(x, \mathbf{p})$. Из соображений удобства для индексации итераций во второй части алгоритма будем использовать переменную j, значения которой начинаются с единицы. В качестве интервальной оценки $\mathbf{a}_j$ левой границы множества возможных значений корня на первом шаге второй части алгоритма (т.е. при $j = 1$) используется левая часть интервала I_{lim}, а в качестве интервальной оценки $\mathbf{b}_j$ правой границы – его правая часть. На каждой итерации происходит уточнение промежутков $\mathbf{a}_j = [\underline{a}_j, \overline{a}_j]$ и $\mathbf{b}_j = [\underline{b}_j, \overline{b}_j]$, такое, что $\mathbf{a}_{j+1} \subseteq \mathbf{a}_j$ и $\mathbf{b}_{j+1} \subseteq \mathbf{b}_j$. Для этого, аналогично первой части алгоритма, требуется вычислять середины промежутков $\mathbf{a}_j$ и $\mathbf{b}_j$: $\text{mid}\,\mathbf{a}_j = (\underline{a}_j + \overline{a}_j)/2$ и $\text{mid}\,\mathbf{b}_j = (\underline{b}_j + \overline{b}_j)/2$. Вместе с ними производятся оценки предельных погрешностей значений $\Delta f(\text{mid}\,\mathbf{a}_j, \mathbf{p})$ и $\Delta f(\text{mid}\,\mathbf{b}_j, \mathbf{p})$ в этих точках. Затем проверяются условия: 1) если $|f(\text{mid}\,\mathbf{a}_j, \mathbf{p})| < \Delta f(\text{mid}\,\mathbf{a}_j, \mathbf{p})$, то $\mathbf{a}_{j+1} = [\underline{a}_j, \text{mid}\,\mathbf{a}_j]$, иначе $\mathbf{a}_{j+1} = [\text{mid}\,\mathbf{a}_j, \overline{a}_j]$; 2) если $|f(\text{mid}\,\mathbf{b}_j, \mathbf{p})| < \Delta f(\text{mid}\,\mathbf{b}_j, \mathbf{p})$, то $\mathbf{b}_{j+1} = [\text{mid}\,\mathbf{b}_j, \overline{b}_j]$, иначе $\mathbf{b}_{j+1} = [\underline{b}_j, \text{mid}\,\mathbf{b}_j]$.

Уточнение границ интервалов $\mathbf{a}_j$ и $\mathbf{b}_j$ производится до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки. На Рис. 2 (а) приведен пример того, как выполняется поиск оценки **a** нижней границы множества возможных значений корня во второй части алгоритма (для следующего шага будет отобран интервал $\mathbf{a}_{j+1} = [\text{mid}\,\mathbf{a}_j, \overline{a}_j]$), а на Рис. 2 (б) показан поиск оценки **b** верхней границы (для следующего шага будет отобран интервал $\mathbf{b}_{j+1} = [\underline{b}_j, \text{mid}\,\mathbf{b}_j]$).

При применении итерационных алгоритмов часто используют правила остановки, основанные на сравнении оценок искомых значений, полученных на текущей и предыдущей итерации. Если модуль их разности оказывается меньше некоторого заданного порогового значения ε, то процесс останавливают. Подобная формулировка условия, однако, позволяет получить решение только с контролем методической погрешности (ε), влияние же погрешностей параметров решаемого уравнения при этом не учитывается, хотя они зачастую и определяют точность конечных результатов.

Остановка итерационного процесса интервальной бисекции, согласованная с величиной погрешностей исходных данных, может быть выполнена следующим образом. На каждом итерационном шаге второй части алгоритма выполняется оценка полуширины интервала возможной погрешности корня $\Delta_j = |\overline{b}_j + \underline{a}_j|/2$. Данное значение является оценкой предела погрешности искомого корня уравнения косвенных измерений, вызванного неточностью его коэффициентов, и подвергается округлению по правилам метрологии. В соответствии с ними пределы возможной погрешности приводятся с одной, максимум двумя, значащими цифрами. Это условие задает по сути дела дополнительное метрологическое требование к остановке итерационного процесса, которое позволяет своевременно остановить вычисления и не выполнять лишние итерации. Итерационный процесс предлагается остановить, если выполнено $\text{round}(\Delta_j) = \text{round}(\Delta_{j\text{-}1})$, где round – оператор округления.

IV. Интервальная бисекция для систем уравнений

В работе [7] представлена такая модификация метода бисекции для поиска решений систем нелинейных уравнений косвенных измерений, которая позволяет гарантированно их получить вместе с надежными оценками погрешности, обусловленными неточностью коэффициентов решаемых уравнений. Далее кратко описана суть этого подхода, отвечающего всем требованиям, перечисленным во 2-м пункте статьи.

Пусть для получения результатов косвенных измерений $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ необходимо отыскать решения системы уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \ldots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}))^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$, где коэффициенты $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ определяются результатами выполненных прямых измерений, $\mathbf{0}$ – вектор, заполненный нулями. Пусть также из общих сведений об измерительной ситуации заданы такие интервалы возможных значений $\boldsymbol{x}_i$, которые образуют область $x \in \Omega^{(1)}$, с гарантией содержащую искомое решение. Как и в случае решения одного уравнения, функции $f_1, \ldots, f_n$ должны быть монотонны в области $\Omega^{(1)}$.

В начале работы алгоритма область поиска решения задана как $\Omega^{(1)}$, на первой итерации она будет сокращена до $\Omega^{(2)} \subseteq \Omega^{(1)}$, потом – до $\Omega^{(3)} \subseteq \Omega^{(2)}$ и т.д. На j-м шаге алгоритма ($j = 1, 2, \ldots$) сокращение области поиска выполняется разделением $\Omega^{(j)}$ на части, после чего из них исключаются те, что не содержат решения. Для этого, как и прежде, следует вычислить знаки значений функций f_i на границах полученных частей $\Omega^{(j)}$, а также оценки предельных погрешностей этих значений, которые возникают из-за неточности коэффициентов **p**. Далее исключаются те элементы разбиения $\Omega^{(j)}$, что не содержат решения системы. При этом применяются те же условия, что и в одномерном случае: если хотя бы одна из функций $f_1, \ldots, f_n$ не изменяет знак своих значений на границах анализируемой подобласти $\Omega^{(j)}$ и предельные погрешности этих значений не превосходят их модулей, то следует удалить эту часть $\Omega^{(j)}$ из дальнейшего рассмотрения. Сокращение области локализации решения системы будет выполняться до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки итерационного процесса. Для учета метрологической специфики предлагается сформулировать соответствующее правило так. На каждой итерации выполняется вычисление оценок $\mathbf{\Delta}_j = (\Delta_{j1}, \ldots, \Delta_{jn})^{\mathrm{T}}$ предельных погрешностей для всех компонент решения. Здесь Δ_{ji} – полуширина интервала возможных значений переменной x_i на j-ой итерации, получаемая проекцией множества $\Omega^{(j)}$ на ось значений x_i. Итерационный процесс предлагается остановить, когда будет выполнено условие $\mathrm{round}(\mathbf{\Delta}_j) = \mathrm{round}(\mathbf{\Delta}_{j\text{-}1})$, где round – оператор округления компонент вектора по правилам метрологии.

Приведенные метрологически ориентированные модификации метода бисекции гарантируют нахождение достоверных оценок пределов возможных значений корня или решения системы уравнений косвенных измерений на каждой итерации. Это позволяет среди прочего отнести предложенный алгоритм к категории гарантирующих в терминах работы [9]. Использование информации о точности результатов прямых измерений, задействованных в косвенном измерении, позволяет сократить количество выполняемых итераций. Получаемые границы возможных значений корня или решения системы таковы, что в каждой точке получаемых интервалов нет метрологически обоснованных оснований для отклонения гипотезы о том, что выполняется равенство $f(x, \mathbf{p}) = 0$ (в одномерном случае) или $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ (в многомерном случае). Это означает, что, по сути, получена оценка метрологической характеристики корня уравнения или решения системы уравнений косвенных измерений, а в конечном счете – того результата косвенного измерения, что надлежит получить.

Представленные в статье интервальные модификации метода бисекции были применены для решения различных задач из практики косвенных измерений. В частности ранее в работах [6, 7] были рассмотрены задача определения значения температуры по значению сопротивления для платинового термопреобразователя сопротивления класса АА (путем поиска корня соответствующего нормативного уравнения) и задачи определения высоты волны на поверхности воды по значениям гидродинамического давления в жидкости на глубине и определения координат во внешнем магнитном поле, создаваемом специальным генератором (решались системы из 2 и 3 уравнений соответственно).

V. Примеры применения

Для демонстрации работы представленного метода метрологически обоснованного решения уравнений косвенных измерений рассмотрим несколько примеров из измерительной практики.

A. Измерение длины волны на поверхности воды на основе дисперсионного соотношения

Пусть необходимо определить косвенным образом длины волн, распространяющихся по поверхности воды. В выбранной точке наблюдения заранее определяют глубину, а после с помощью специальных измерительных средств регистрируют период волнения. Для получения значения длины волны необходимо найти корень следующего нелинейного уравнения [10]:

$$g\cdot(2\cdot\pi/\lambda)\cdot\mathrm{th}(2\cdot\pi\cdot\delta/\lambda) = (2\cdot\pi/T)^2, \qquad (1)$$

где d – измеренная глубина, м, λ – неизвестная длина волны, м, T – измеренный период волнения, с, g = 9,806 м/с^2 – ускорение свободного падения. Значение длины волны λ измеряется косвенным образом по значениям периода и глубины.

Были выполнены расчеты для следующих значений результатов прямых измерений, полученных с погрешностями: d=19,6±0,1 м, T=11,0±0,2 с. Наблюдения за волнением на открытых акваториях показывают, что длина волны, как правило, находится в основном в диапазоне от 30 до 150 м. Поэтому в качестве интервала первоначальной локализации корня для интервальной бисекции выбран промежуток I_1 = [30, 150] м.

Последовательности полученных приближений корня и границ интервала его возможной погрешности, унаследованной от результатов прямых измерений, представлены в табл. 1. Значение корня, которое могло бы быть получено при решении уравнения (1) без учета погрешностей величин d и T, составляет λ^* = 136 м.

ТАБЛИЦА I Оценки корня уравнения (1) и пределов его погрешности на разных итерациях интервальной бисекции

Номер итерации *n*		**Приближение корня на *n*-м шаге**	**Оценка границ возможных значений корня**	
Первый этап, i	***Второй этап, j***		***Левой***	***Правой***
1	–	90,00000	30,0000	150,0000
2	–	120,0000	90,0000	150,0000
3	1	135,0000	120,0000	150,0000
–	2	135,0000	127,5000	142,5000
–	3	136,8750	131,2500	142,5000
–	4	135,9375	131,2500	140,6250
–	5	135,9375	132,1875	139,6875
–	6	135,9375	132,1875	139,6875

a. *Оценки значения корня уравнения (1) и пределов его погрешности на разных итерациях интервальной бисекции*

С помощью представленного метода интервальной бисекции получен интервал: $\lambda = 136\pm4$ м. Данный промежуток содержит в себе значение λ^*.

B. *Измерение напряжения на нелинейном элементе электрической цепи постоянного тока*

Интервальный метод бисекции для поиска корня уравнений был также применен для решения измерительной задачи из электротехнической области. Необходимо было найти напряжение на нелинейном элементе электрической цепи постоянного тока, изображенной на Рис. 3. Входящее в ее состав нелинейное сопротивление r_1 имеет вольт-амперную характеристику, равную $I_1 = a{\cdot}U_1^2$, где $a = 0{,}02$ (Ом·В)$^{-1}$, $\Delta a = 0{,}0001$ (Ом·В)$^{-1}$. Линейное сопротивление r_2 предварительно измерено, результат измерения составил $r_2 = (12{,}00\pm0{,}01)$ Ом. Постоянное напряжение U, приложенное к данной цепи, также измерено напрямую: $U = (4{,}00\pm0{,}01)$ В.

Уравнение для косвенного измерения напряжения U_1 соответственно имеет вид:

$$U_1 + aU_1^2 r_2 - U = 0\,. \qquad (2)$$

Значение корня, которое могло бы быть получено при решении уравнения (2) без учета погрешностей измеренных напрямую величин, составляет $U_1^* = 2{,}5$ В. В качестве первоначального интервала локализации корня для метода интервальной бисекции выбран промежуток [0,1; 5,0] В, определяемый из общих сведений о питании электрической цепи, участком которой является анализируемая цепь. Последовательности полученных приближений искомых значений U_1 и границ интервалов их погрешности представлены в табл. 2.

ТАБЛИЦА II ОЦЕНКИ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ (2) И ПРЕДЕЛОВ ЕГО ПОГРЕШНОСТИ НА РАЗНЫХ ИТЕРАЦИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ БИСЕКЦИИ

Номер итерации *n*		**Приближение корня на *n*-м шаге**	**Оценка границ возможных значений корня**	
Первый этап, i	***Второй этап, j***		***Левой***	***Правой***
1	–	2,550000	0,100000	5,000000
2	–	1,325000	0,100000	2,550000
3	–	1,937500	1,325000	2,550000
4	–	2,243750	1,937500	2,550000
5	–	2,396875	2,243750	2,550000
6	–	2,473437	2,396875	2,550000
7	–	2,511719	2,473437	2,550000
8	1	2,492578	2,473437	2,511719
–	2	2,497363	2,483008	2,511719
–	3	2,499756	2,487793	2,511719

b. *Оценки значения корня уравнения (2) и пределов его погрешности на разных итерациях интервальной бисекции*

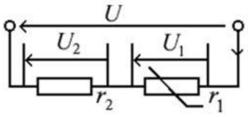

Рис. 3. Объект измерения – нелинейная электрическая цепь постоянного тока

Решение, полученное с помощью интервального метода бисекции, составляет $U_1 = (2{,}500\pm0{,}015)$ В. Данный промежуток содержит в себе значение U_1^*.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен метрологически обоснованный подход к решению как отдельных нелинейных уравнений с неточными коэффициентами, так и их систем. Предложенный метод позволяет на каждой итерации получать интервал, который гарантированно содержит все возможные значения корня или решения системы в случае соблюдения требований: задана область локализации искомого корня или решения и функции, входящие в состав решаемых уравнений, в ее пределах монотонны. В случае, когда решаемые уравнения являются уравнениями косвенных измерений, эти условия соблюдены. Показано, что предложенный метод обладает рядом несомненных достоинств и при его применении в практике косвенных измерений позволяет удовлетворить всем требованиям, что предъявляются в метрологии к результату измерений.

Представленные в работе примеры применения демонстрируют принцип работы представленного подхода и достоверность предоставляемых им результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соболев В.С. Метрологическое автосопровождение результатов измерений в интеллектуальных измерительных системах. Диссертация на соискание степени доктора технических наук по специальности 05.11.16. Санкт-Петербург, 1999.

[2] Семёнов К.К., Солопченко Г.Н. Исследование комбинированного метода метрологического автосопровождения программ обработки результатов измерений // Измерительная техника. 2011. № 4. С. 14–19.

[3] Федеральный закон Российской Федерации «Об обеспечении единства измерений» от 26.06.2008 № 102-ФЗ.

[4] Тарбеев Ю.В., Челпанов И.Б., Сирая Т.Н. Развитие работ по метрологической аттестации алгоритмов обработки данных при измерениях // Измерительная техника. 1985. № 3. С.13–14.

[5] Солопченко Г.Н. Принципы нормирования, определения и контроля характеристик погрешности вычислений в ИИС // Измерительная техника. 1985. № 3. С. 9–11.

[6] Семенов К.К., Целищева А.А. Интервальный метод бисекции для метрологически обоснованного поиска корней уравнений с неточно заданными исходными данными // Измерительная техника. 2018. № 3. С.10-15.

[7] Семенов К.К., Целищева А.А. Обобщённый интервальный метод бисекции для метрологически обоснованного поиска решений систем уравнений с неточно заданными исходными данными // Измерительная техника. 2019. № 3. С. 13-19.

[8] Семенов К.К. Автоматическое дифференцирование функций, выраженных программным кодом // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2011. Т. 54. №. 12. С.34-40.

[9] Шокин Ю.И. Об интервальных задачах, интервальных алгоритмах и их трудоемкости // Вычислительные технологии. 1996. Т. 1. №. 1. С.98-115.

[10] Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: изд-во ЛГУ, 1981. 196 с.