Системный подход к оценке потенциального уточнения результатов измерений, достигаемого за счет учета зависимостей между измеряемыми величинами

В. А. Гаранин[1], К. К. Семенов[2]
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
[1]s.garanin.v.a@mail.ru, [2]semenov.k.k@mail.com

Аннотация. **В настоящей статье рассмотрена задача уточнения результатов измерений за счет учета известных зависимостей между измеряемыми величинами. Степень возможного прироста точности определяется погрешностями результатов выполняемых измерений и точностью математической модели взаимосвязи между измеряемыми величинами. Приведены обобщенные выражения для уточненной оценки значений измеряемых величин, учитывающей известные функциональные зависимости, и для оценки степени потенциального уточнения, достигаемого за счет учета этих зависимостей. Приведены примеры расчета для ряда измерительных ситуаций.**

Ключевые слова: взаимосвязи между измеряемыми величинами; повышение точности; результаты измерений; погрешность измерения

I. Введение

Один из способов повышения точности результатов измерений заключается в учете функциональных связей между зависимыми измеряемыми величинами. Данным способом достижения уточнения нечасто пользуются на практике, а вместе с тем он содержит в себе значительный ресурс для снижения погрешностей и при этом не требует внесения изменений в состав используемой измерительной техники и схемы измерений. Основной причиной этому является то обстоятельство, что учет информации о связях между измеряемыми величинами неизбежно ведет к усложнению алгоритма обработки результатов измерений: поиск оптимальных численных оценок значений измеряемых величин приходится выполнять в ограничениях, накладываемых использованием данных сведений. Если в классической измерительной ситуации, когда имеют место многократные равноточные измерения нескольких величин с преобладанием случайных погрешностей, подчиненных нормальному закону распределения, обработка результатов измерений сводится к обычному их усреднению [1], то обработка результатов совместных измерений в отличающихся условиях и с заданными ограничениями, налагаемыми на результат, уже не так тривиальна [2]. Метрологический анализ такой измерительной ситуации также усложняется: необходимо учитывать не только погрешности выполняемых прямых измерений, но также погрешности параметров математической модели, описывающей зависимости между значениями измеряемых величин, и неопределенность самой модели. Упрощение процедуры учета такой информации могло бы послужить облегчению его внедрения в измерительную практику с целью уточнения получаемых результатов.

В настоящей работе предложен системный подход к построению алгоритмов обработки результатов измерений зависимых величин, включающих в себя учет взаимосвязей между измеряемыми величинами. Приведены простая схема и соответствующие соотношения для оценки степени возникающего уточнения.

Предлагаемый подход заключается в разделении операций обработки прямых измерений и учета зависимостей между измеряемыми величинами, благодаря которому достигается уточнение. Это позволяет упростить дальнейший анализ при сохранении или незначительных потерях эффективности достигаемого результата уточнения.

Предложенный подход решает две задачи. Во-первых, позволяет упростить оценку пределов тех погрешностей результатов измерений, что остаются после учета зависимостей между измеряемыми величинами. Во-вторых, сама по себе декомпозиция сложной алгоритмической задачи упрощает разработку ее решения и позволяет распространить используемые методы на новые области применения.

Идеи, предложенные в данной работе, обобщают ту практику учета информации о взаимосвязях между измеряемыми величинами, которая уже имеет место [3–7].

II. Постановка задачи

При обработке результатов измерений традиционно применяют аппарат теории вероятностей и математической статистики. Результат измерения рассматривают как реализацию случайной величины $\hat{x}$ с некоторым законом распределения, параметры $\boldsymbol{\theta}$ которого неизвестны. Результаты многократных измерений в таком

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта №19-71-00127.

случае являют собой выборку из соответствующей генеральной совокупности. В роли генерального математического ожидания $E(\hat{x}) = x$ выступает сумма действительного значения измеряемой величины и неисключенной систематической погрешности, а дисперсия $Var(\hat{x})$ характеризует неопределенность результатов измерений, вызванную случайными причинами. Без потери общности будем считать, что параметры $\boldsymbol{\theta}$ определены так, что включают в себя искомое значение $E(\hat{x})$.

Обобщенно методы оценки параметров $\boldsymbol{\theta}$ случайной величины x можно представить в виде алгоритма оптимизации

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} r(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{x}})$$

или

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} r(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{x}})$$

некоторого функционала $r(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{x}})$ над массивом результатов выполненных измерений $\hat{\mathbf{x}} = \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n\right)^{\mathrm{T}}$. Фактический вид функционала $r(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{x}})$ зависит от доступной априорной информации о законе распределения случайной величины x, от сделанных допущений и выбранного метода оценивания неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}$.

Задача обработки результатов измерений усложняется, если поиск оптимума функционала r включает в себя учет априорной информации о функциональных связях между измеряемыми величинами.

Приведем пример подобной задачи. Пусть выполнены совместные многократные измерения ряда взаимосвязанных величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)^{\mathrm{T}}$ и результаты этих измерений образуют матрицу $\hat{\mathbf{X}} = \left(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, ..., \hat{\mathbf{x}}_N\right)^{\mathrm{T}}$, где $\hat{\mathbf{x}}_j = \left(\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, ..., \hat{x}_{jn}\right)^{\mathrm{T}}$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Пусть функциональная зависимость между величинами $\mathbf{x}$ формализована в виде математической модели вида

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

представляющей собой одно или систему уравнений связи, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_m)^{\mathrm{T}}$ – вектор параметров модели M, а $\mathbf{0}$ – вектор-столбец, заполненный нолями. При этом уравнения $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ таковы, что не допускают единственности решения относительно $\mathbf{x}$.

Требуется получить оценки $Est_M(\mathbf{x})$ значений $\mathbf{x}$ по всему имеющемуся комплексу информации: результатам выполненных измерений $\hat{\mathbf{X}}$ и модели M. Тогда алгоритм вычисления оценки $Est_M(\mathbf{x})$ будет представлять собой поиск оптимума функционала $r(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{X}})$ относительно значений $\left(x_1, x_2, ..., x_N\right)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{\theta}$ при регуляризирующем условии $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Для этого следует получить оценки

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}: M(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}} r(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{X}})$$

или

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}: M(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}} r(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{X}})$$

для которых верно, что $Est_M(\mathbf{x}) \in \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Для ответа на вопрос, насколько полученные оценки $Est_M(\mathbf{x})$ точнее тех оценок, что вычислены без учета информации о взаимосвязях измеряемых величин, необходимо оценить значения $Var(\hat{\boldsymbol{\theta}})$. Эта задача не имеет общего решения, выраженного в формульном виде, хотя бы в силу того, что функционал взаимосвязи $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ может быть любым.

Для облегчения метрологического анализа такого рода измерительных ситуаций, связанных с достижением уточнения благодаря более полному использованию имеющейся информации, предлагается следующая декомпозиция алгоритма получения уточненной оценки значений измеряемых совместно величин за счет учета функциональных связей между ними.

III. Метод оценки потенцеально достигаемого уточнения

Обозначим алгоритм поиска значений параметров $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, обеспечивающих оптимум функционала $r(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{X}})$ в ограничениях, заданных уравнениями взаимосвязи между измеряемыми величинами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, как

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = rEV(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF),$$

где M – краткое обозначение математической модели зависимостей между величинами $\mathbf{x}$, rEV (сокращенно от regularized Expected Value estimation) представляет собой алгоритм оценки $Est_M(x)$ с учетом условия $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$, $aPDF$ (сокращенно от Assumed Probability Density Function) – предполагаемая плотность распределения результатов измерений с параметрами $\boldsymbol{\theta}$.

Поскольку получаемые с применением rEV оценки учитывают зависимости между измеряемыми величинами, то имеют место равенства вида $M(Est_M(\mathbf{x}), \mathbf{a}) = \mathbf{0}$, а rEV представляет собой отображение

$$rEV : \hat{\mathbf{X}} \to \{\hat{\boldsymbol{\theta}} \mid M(Est_M(\mathbf{x}), \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \hat{\mathbf{X}} \in aPDF\}.$$

В данной работе предполагается, что алгоритм rEV может быть заменен приближением rEV^*, являющимся композицией двух отдельных частей: первую из них обозначим как $EV(\hat{\mathbf{X}}, aPDF)$ (сокращение от Expected Value estimation), а вторую – как $UM(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF)$ (сокращение от Use of a relationship Model for increasing measurement accuracy). EV представляет собой алгоритм вычисления оценки $Est(\hat{\mathbf{x}})$ значений $\mathbf{x}$ только лишь по полученным результатам измерений $\hat{\mathbf{X}}$, являющейся несмещенной и эффективной для предполагаемого закона распределения $aPDF$. UM – отдельный алгоритм, уточняющий данную оценку за счет учета информации о взаимосвязях между измеряемыми значениями.

Если EV и UM – независимые алгоритмы, то исполнять их можно последовательно. Например, алгоритм UM может быть применен к значениям $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^{\mathrm{T}}$, являющимся результатами исполнения алгоритма EV. В этом случае процедура rEV^* будет иметь вид

$$1\text{: } \mathbf{y} = EV(\hat{\mathbf{X}}, aPDF),$$

$$2\text{: } \hat{\boldsymbol{\theta}} = UM(\mathbf{y}, M, aPDF),$$

и соответственно

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = rEV^*(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF) = UM(EV(\hat{\mathbf{X}}, aPDF), M, aPDF).$$

Использование схемы последовательного вычисления $EV \Rightarrow UM$, как правило, продиктовано простотой ее практической реализации, однако обратная последовательность $UM \Rightarrow EV$ также возможна. В таком случае rEV^* будет иметь вид

$$1\text{: } \mathbf{Y} = UM(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF),$$

$$2\text{: } \hat{\boldsymbol{\theta}} = EV(\mathbf{Y}, aPDF),$$

где $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N)$ – матрица, составленная по итогам обработки результатов прямых измерений, выполненной на основании априорных сведений о взаимосвязи между значениями совместно измеряемых величин $\mathbf{x}$. Векторы $\mathbf{y}_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, в таком случае содержат оценки значений $\mathbf{x}$, полученные с учетом функциональных связей между ними. В этом случае

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = rEV(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF) = EV(UM(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF), aPDF).$$

При декомпозиции алгоритма rEV возникает закономерный вопрос: обеспечивает ли такая схема вычислений – т. е. поочередное выполнение операций учета зависимостей и поиска эффективных оценок на множестве результатов выполняемых прямых измерений – наибольшее повышение точности совместных измерений? Формально алгоритм, основанный на представленной композиции rEV^*, *может* достигать эффективности исходного метода rEV, однако такой результат не гарантирован и в некоторых ситуациях декомпозиция приведет к снижению эффективности. С другой стороны, использование rEV^* вместо rEV позволяет получить выражения для метрологических характеристик уточненной оценки и получить конструктивное выражение и для оценки степени возникающего уточнения. Данное обстоятельство может играть существенную роль: в измерительных задачах зачастую гарантия того, что предельная погрешность каждого результата измерения не превысит известной нормы, важнее возможно в среднем большей, но неизвестной точности. Привлечение дополнительной информации об измеряемых величинах теряет смысл, если характеристики погрешности потенциально более точных в среднем оценок окажутся неизвестны.

Замена алгоритма rEV на композицию типа rEV^* при выполнении метрологического анализа точности оценок $Est_M(\mathbf{x})$ также допустима: всякое упрощение приемлемо, если оно не занижает пределов возможной погрешности.

Во введенных обозначениях степень получаемого повышения точности $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)^{\mathrm{T}}$ для каждого из окончательных результатов измерения величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^{\mathrm{T}}$, достигаемую за счет учета зависимостей между ними, можно определить как

$$k_i = \Delta EV_i \cdot (\Delta rEV_i)^{-1},$$

где $\Delta EV_i = \Delta Est(x_i)$ – характеристика погрешности результата применения алгоритма EV непосредственно к измерительным данным $\hat{\mathbf{X}}$, $\Delta rEV_i = \Delta Est_M(x_i)$ – характеристика погрешности результатов применения алгоритма rEV (исходному или в виде композиции rEV^*), $i = 1, 2, \ldots, N$. Значениями ΔEV_i, ΔrEV_{i} могут выступать пределы возможных погрешностей либо среднеквадратические отклонения оценок измеряемых величин, т.е.

$$k_i^2 = \frac{Var(Est_M(x_i)) + E^2(Est_M(x_i) - x_i)}{Var(Est(x_i)) + E^2(Est(x_i) - x_i)}.$$

Использование композиции $EV \Rightarrow UM$ позволяет построить оценку значений k_i широко применяемым [2] в метрологии методом линеаризации:

$$k_i = (\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Delta})^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{d}{d\hat{x}_{ij}} EV\left(\hat{\mathbf{X}}^{\langle i\rangle}, aPDF\right) \right| \cdot \Delta_{ij}$$

или

$$k_i^2 = (\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}} \cdot \mathbf{c})^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}^{\langle i\rangle}} EV\left(\hat{\mathbf{X}}^{\langle i\rangle}, aPDF\right)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}^{\langle i\rangle}} \cdot \frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}^{\langle i\rangle}} EV\left(\hat{\mathbf{X}}^{\langle i\rangle}, aPDF\right) \right),$$

где вектор $\boldsymbol{\Delta}$ составлен из пределов Δ_{ij} возможных абсолютных погрешностей результатов выполненных измерений $\hat{\mathbf{X}}$; $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}}$ и $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}^{\langle i\rangle}}$ являются ковариационными матрицами случайных погрешностей элементов матрицы $\hat{\mathbf{X}}$ и его i-го столбца $\hat{\mathbf{X}}^{\langle i\rangle}$, а вектор $\mathbf{c}$ в соответствующем порядке заполнен модулями значений производных $Est_M(x_i)$ по результатам выполненных измерений:

$$\frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}} rEV^*(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF) =$$

$$= \frac{d}{d\mathbf{y}} UM\left(\mathbf{y}, M(\mathbf{y}, \mathbf{a}), aPDF\right)^{\mathrm{T}} \cdot \frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}} EV(\hat{\mathbf{X}}, aPDF) =$$

$$= \left(\frac{\partial UM(\mathbf{y}, M, aPDF)}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial UM(\mathbf{y}, M, aPDF)^{\mathrm{T}}}{\partial M} \cdot \frac{dM(\mathbf{y}, \mathbf{a})}{d\mathbf{y}} \right)^{\mathrm{T}} \cdot$$

$$\cdot \frac{dEV(\hat{\mathbf{X}}, aPDF)}{d\hat{\mathbf{X}}}.$$

Здесь $\mathbf{y} = EV(\hat{\mathbf{X}}, aPDF)$, символ $d/d\mathbf{y}$ означает взятие полной производной по указанной переменной, а $\partial/\partial\mathbf{y}$ – частной производной по отмеченному аргументу функции.

В случае композиции $rEV^* = (UM \Rightarrow EV)$ вектор с образован модулями следующих значений:

$$\frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}} rEV^*(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF) = \frac{dEV(\mathbf{Y}, aPDF)^{\mathrm{T}}}{d\mathbf{Y}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial UM(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF)}{\partial \hat{\mathbf{X}}} + \frac{\partial UM(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF)^{\mathrm{T}}}{\partial M} \cdot \frac{dM(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{a})}{d\hat{\mathbf{X}}} \right),$$

где $\mathbf{Y} = UM(\hat{\mathbf{X}}, M, aPDF)$.

IV. Пример

Поясним применение подхода, заключающегося в выполнении последовательности операций $EV \Rightarrow UM$, на следующем примере. Пусть измеряются значения величин x_1 и x_2, систематическая погрешность при измерениях отсутствует, случайные погрешности подчинены нормальному закону с параметрами $\boldsymbol{\theta}$.

Пусть для x_1 и x_2 получено по n независимых равноточных результатов измерений, образующих соответственно векторы $\hat{\mathbf{x}}_j = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, ..., \hat{x}_{jn})^{\mathrm{T}}$, $j = 1, 2$. Пусть известно, что значения x_1 и x_2 связаны линейной функцией $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = a_1 \cdot x_2 + a_2 - x_1 = 0$, при этом погрешностями коэффициентов $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}$ допустимо пренебречь.

В этом случае алгоритм rEV представляет собой следующее.

Эффективные оценки $Est_M(x_1)$ и $Est_M(x_2)$ величин x_1 и x_2 соответственно, учитывающие зависимость $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$, могут быть получены методом максимального правдоподобия из совместного двумерного нормального распределения $\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \boldsymbol{\theta})$, где для рассматриваемого примера $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^{\mathrm{T}}$, где σ_1^2 и σ_2^2 – соответственно дисперсии случайной погрешности результатов измерений x_1 и x_2 соответственно. Учет известной зависимости между величинами x_1 и x_2 выполняется выводом функции $x_2 = f_M(x_1, \mathbf{a})$ из равенства $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$. В таком случае эффективная уточненная оценка значения x_1, использующая информация о его связи со значением x_2 определяется следующим образом (процедура rEV).

Запишем условие для максимума логарифмической функции правдоподобия для $\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \boldsymbol{\theta})$ по параметру $\theta_1 = x_1$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \ln \Psi(\hat{x}_{1i}, \hat{x}_{2i}, \boldsymbol{\theta}) \right) = 0.$$

Данное равенство приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{1i} - \theta_1)^2}{\sigma_1^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{2i} - f_M(\theta_1, \mathbf{a}))^2}{\sigma_2^2} \right) = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$\theta_1 = \overline{x}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{\partial f_M(\theta_1, \mathbf{a})}{\partial \theta_1} \cdot (\overline{x}_2 - f_M(\theta_1, \mathbf{a})),$$

где

$$\overline{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{ji},\ j = 1, 2,$$

а вместо значений σ_1^2 и σ_2^2 при достаточно большом n могут быть использованы статистические оценки.

Для линейной зависимости $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = a_1 \cdot x_2 + a_2 - x_1 = 0$ между x_1 и x_2 получаем, что

$$\hat{\theta}_1 = Est_M(x_1) = \left(\overline{x}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \left(\overline{x}_2 + \frac{a_2}{a_1} \right) \right) / \left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{1}{a_1^2} \right),$$

Так как измерения равноточные, а погрешностями коэффициентов a_1 и a_2 допустимо пренебречь, то $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 / a_1^2$ и

$$\hat{\theta}_1 = Est_M(x_1) = (\overline{x}_1 + f_M^{-1}(\overline{x}_2, \mathbf{a})) / 2 = (\overline{x}_1 + a_1 \cdot \overline{x}_2 + a_2) / 2.$$

Теперь для сравнения определим выражение для уточненной оценки $\hat{\theta}_1$, получаемой в результате декомпозиции рассмотренной методики rEV в последовательность действий $EV \Rightarrow UM$.

Пусть в качестве EV выступает все тот же метод максимального правдоподобия, тогда оценка значения измеряемой величины x_j есть простое среднее $\overline{x}_j$ по выборке результатов измерений $\hat{\mathbf{x}}_j$ (в силу того, что $aPDF$ есть нормальный закон $N(x_j, \sigma_j^2)$):

$$y_j = EV(\hat{\mathbf{x}}_j, aPDF) = \overline{x}_j,\ j = 1, 2.$$

В качестве алгоритма UM вновь используем метод максимального правдоподобия для учета функциональных связей между измеряемыми величинами x_1 и x_2. Пропуская очевидные преобразования, получим из двумерного совместного нормального распределения $\Psi(y_1, y_2, \boldsymbol{\theta})$ независимых величин $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$, где $\boldsymbol{\theta}$ по-прежнему равно вектору $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^{\mathrm{T}}$, следующее выражение с использованием подстановки $\theta_2 = f_M(\theta_1)$:

$$\theta_1 = y_1 + \frac{Var(y_1)}{Var(y_2)} \cdot \frac{\partial f_M(\theta_1, \mathbf{a})}{\partial \theta_1} \cdot \left(y_2 - f_M(\theta_1, \mathbf{a})\right),$$

$$\hat{\theta}_1 = UM(\mathbf{y}, M(\mathbf{y}, \mathbf{a}), aPDF) =$$

$$= \left(y_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \left(y_2 + \frac{a_2}{a_1} \right) \right) / \left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{1}{a_1^2} \right).$$

Поскольку, как и выше, измерения равноточные, а погрешностями коэффициентов a_1 и a_2 допустимо пренебречь, то:

$$\hat{\theta}_1 = \left(EV\left(\hat{\mathbf{x}}_1, N(x_1, \sigma_1^2)\right) + f_M^{-1}\left(EV\left(\hat{\mathbf{x}}_2, N(x_2, \sigma_2^2)\right), \mathbf{a} \right) \right) / 2 =$$

$$= \left(y_1 + a_1 \cdot y_2 + a_2 \right) / 2 = \left(\overline{x}_1 + a_1 \cdot \overline{x}_2 + a_2 \right) / 2.$$

Нетрудно видеть, что в рассмотренном линейном случае результат применения композиции $EV \Rightarrow UM$ совпадает с результатом применения исходного алгоритма *rEV*. Следовательно, верхний предел эффективности результата замены *rEV* композицией rEV^* совпадает с эффективностью исходного алгоритма *rEV*.

Очевидно, что

$$Var\left(Est_M\left(x_1\right)\right) = \left(Var\left(\overline{x}_1\right) + a_1^2 \cdot Var\left(\overline{x}_2\right) \right) / 4 =$$

$$= \left(\sigma_1^2 + a_1^2 \cdot \sigma_2^2 \right) / \left(4 \cdot n \right).$$

Отсюда степень достигаемого уточнения в сравнении с оценкой $Est(x_1)$ оказывается в точности равна

$$k_1^2 = \frac{Var(Est(x_1))}{Var(Est_M(x_1))} = \frac{\sigma_1^2 / n}{\left(\sigma_1^2 + a_1^2 \cdot \sigma_2^2 \right) / \left(4 \cdot n \right)} = 2.$$

Воспользуемся для сравнения приведенной в основной части статьи выражением оценки степени уточнения, основанном на операции линеаризации:

$$k_i^2 = (\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}} \cdot \mathbf{c})^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}} EV\left(\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}, aPDF\right)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}} \cdot \frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}} EV\left(\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}, aPDF\right) \right),$$

$$\frac{dEV\left(\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}, aPDF\right)^{\mathrm{T}}}{d\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}} \cdot \frac{dEV\left(\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}, aPDF\right)}{d\hat{\mathbf{X}}^{\langle i \rangle}} = \sigma_1^2 / n,$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{X}}} \cdot \mathbf{c} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1} UM\left(\mathbf{y}, M(\mathbf{y}, \mathbf{a}), aPDF\right)^{\mathrm{T}} \cdot \frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}} EV\left(\hat{\mathbf{X}}, aPDF\right) \cdot Var(y_1) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_2} UM\left(\mathbf{y}, M(\mathbf{y}, \mathbf{a}), aPDF\right)^{\mathrm{T}} \cdot \frac{d}{d\hat{\mathbf{X}}} EV\left(\hat{\mathbf{X}}, aPDF\right) \cdot Var(y_2) =$$

$$= \frac{\dfrac{\sigma_1^2}{n}}{\left(1 + \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \dfrac{1}{a_1^2}\right)^2} + \frac{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \dfrac{1}{a_1}\right)^2 \cdot \dfrac{\sigma_2^2}{n}}{\left(1 + \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \dfrac{1}{a_1^2}\right)^2} = \frac{\sigma_1^2}{2 \cdot n},$$

откуда получается тот же результат $k_1^2 = 2$.

Результаты рассмотренного примера естественным образом обобщаются на случай большего числа измеряемых величин. Если совместно измеряются значения $N \geq 2$ величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^{\mathrm{T}}$, зависимость между которыми описывается уравнением, либо системой уравнений $M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$, такой, что однозначное решение для $\mathbf{x}$ не может быть получено, то замена *rEV* композицией rEV^* приводит к тем же самым результатам уточнения.

V. Заключение

Представленный подход предлагает для задач измерительной практики представлять методы повышения точности измерений за счет учета взаимосвязей между измеряемыми величинами в виде композиции двух частей: отдельно алгоритма обработки результатов выполняемых измерений без учета зависимостей между ними и отдельно алгоритма, уточняющего получаемые значения за счет использования такой информации. Это позволяет упростить внедрение соответствующих методов в метрологические задачи. В работе представлен важный пример, подкрепляющий данное утверждение. Представлены необходимые обобщенные соотношения, которые могут быть использованы в практике измерений.

Список литературы

[1] GUM. Guide to the expression of uncertainty in measurement. Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization; 2004.

[2] Reznik L.K., Solopchenko G.N. Use of priori information on functional relations between measured quantities for improving accuracy of measurement // Measurement. 1985. Т. 3. №. 3. С. 98–106.

[3] Bagajewicz M.J., Cabrera E. Data reconciliation in gas pipeline systems // Industrial & engineering chemistry research. 2003. Т. 42. №. 22. С.5596–5606.

[4] Reznik L., Kluever K.A. Improving measurement accuracy in sensor networks by an object model generation and application // SENSORS, 2007 IEEE. IEEE, 2007. С. 371–374.

[5] Ali M.H., Kurokawa S., Uesugi K. Camera based precision measurement in improving measurement accuracy // Measurement. 2014. Т. 49. С. 138–147.

[6] Guo S., Liu P., Li Z. Data reconciliation for the overall thermal system of a steam turbine power plant // Applied energy. 2016. Т. 165. С. 1037–1051.

[7] Prata D.M. et al. Nonlinear dynamic data reconciliation and parameter estimation through particle swarm optimization: Application for an industrial polypropylene reactor // Chemical Engineering Science. 2009. Т. 64. №. 18. С. 3953–3967.