Исследование взаимосвязи информационной эффективности и сложности устройств цифровой обработки информации

А. Н. Губин
Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича
gan50_60@mail.ru

В. Л. Литвинов
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)
vlad.litvinov61@gmail.com

Ф. В. Филиппов
Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича
9000096@mail.ru

***Аннотация*. Рассматриваются вопросы оценки взаимосвязи информационной эффективности и Колмогоровской сложности устройств цифровой обработки информации на примере цифровых фильтров при сглаживании аддитивных случайных помех и выделении полезной составляющей входного сигнала. Исследования основаны на анализе изменений энтропии и динамики информационных процессов сглаживания случайных сигналов.**

Ключевые слова: информационная эффективность, энтропия, Колмогоровская сложность

I. Введение

В настоящее время достаточно актуальной является использование информационных оценок в задачах интеллектуального анализа возникновения состояний неопределенности в различного рода системах обработки данных. Причиной возникновения состояний неопределенности при сглаживании случайных сигналов и выделении полезной составляющей входного сигнала является априорная неопределенность по отношению к характеристикам воздействующих на полезный сигнал помех. Рассмотрим, как связаны между собой сложность и информационная эффективность устройств цифровой обработки информации на примере цифровых сглаживающих фильтров.

II. Постановка задачи

Как показано в работе авторов [1] в общем случае соотношения между взаимной информацией и условными Колмогоровскими сложностями (КС) [2] при взаимодействии объектов (входной сигнал – цифровое устройство – выходной сигнал) можно наглядно представить в виде схемы (рис. 1).

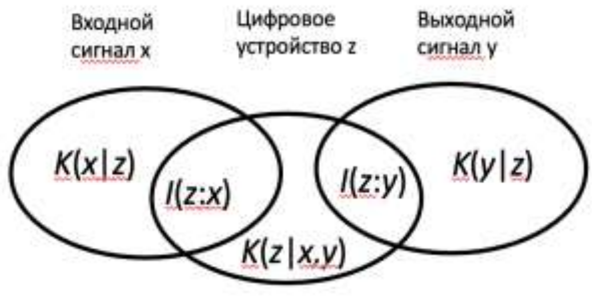

Рис. 1. Общая схема информационного взаимодействия

На рис. 1 область $I(z{:}\,x)$ представляет собой количество информации в устройстве z о входном сигнале x, которое использовано при реализации и настройке устройства для обработки этого сигнала.

Аналогично $I(z{:}\,y)$ обозначает количество информации в устройстве z о выходном сигнале y. Под $K(x|\,z)$ понимается условная Колмогоровская сложность входного сигнала x при его взаимодействии с цифровым устройством z, $K(y|\,z)$ означает условную КС выходного сигнала y, а $K(z|\,x,\,y)$ – условная КС цифрового устройства, формирующего сигнал y при обработке входного сигнала x.

При этом коэффициент информационной эффективности цифровых сглаживающих фильтров можно представить в виде выражения [1]:

$$K_{\text{иэ}} = \frac{ln\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{K(z)}.$$

Здесь Колмогоровская сложность фильтра $K(z)$ может рассматриваться как минимальная длина программы, реализующая фильтр z при наличии информации о сигналах x и y [3], а σ_x и σ_y – значения среднеквадратических ошибок входного и выходного сигналов соответственно.

Представляет интерес рассмотреть влияние параметров цифрового фильтра на его информационную эффективность и значения оценки Колмогоровской сложности фильтра.

III. Показатели эффективности и сложности цифровых фильтров

Пусть осуществляется сглаживание помех и выделение полезной составляющей двумя цифровыми фильтрами с разными показателями Колмогоровской сложности, при этом параметры цифровых фильтров определяются таким образом, что их информационная эффективность оказывается одинаковой. Указанные цифровые фильтры обрабатывают одинаковые входные сигналы. Показатели информационной эффективности каждого фильтра в этом случае представляют собой следующие выражения:

$$K_{иэ} = \frac{ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y1}}}{K_1(z)}, K_{иэ} = \frac{ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y2}}}{K_2(z)}.$$

Эти выражения позволяют определить показатель Колмогоровской сложности для фильтров как

$$K_1(z) = \frac{ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y1}}}{K_{иэ}}, \qquad K_2(z) = \frac{ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y2}}}{K_{иэ}}.$$

Определим $K_2(z)=K_1(z)+\Delta K(z)$, и, учитывая равенство показателей информационной эффективности для рассматриваемых фильтров, можно записать, что

$$\frac{ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y1}}}{K_1(z)} = \frac{ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y2}}}{K_1(z)+\Delta K(z)}.$$

Из последнего выражения следует

$$ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y1}}(K_1(z) + \Delta K(z)) = K_1(z) ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y2}}$$

и далее

$$ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y1}}\left(1 + \frac{\Delta K(z)}{K_1(z)}\right) = ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y2}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta K(z)}{K_1(z)} = \frac{ln\frac{\sigma_{y1}}{\sigma_{y2}}}{ln\frac{\sigma_x}{\sigma_{y1}}}.$$

Полученное выражение позволяет оценить относительное изменение значения Колмогоровской сложности цифровых сглаживающих фильтров в зависимости от изменений их параметров.

IV. Пример сглаживания аддитивной некоррелированной помехи

Рассмотрим процесс сглаживания аддитивной некоррелированной помехи рекурсивным цифровым фильтром, передаточная функция которого имеет следующий вид

$$\Phi(z) = \frac{k(z+1)}{(z-j)^m},$$

где $k = (1-j)^m$ при $|\ j\ | < 1$, а z – аргумент z-преобразования.

Для данного класса фильтров обеспечивается снижение уровня помех до оптимальных значений дисперсии случайной ошибки на выходе фильтра [4]:

$$\sigma^2 = \frac{(1-j)}{2\sqrt{\pi m j}}, \sigma = \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

где σ_x, σ_y – среднеквадратичное отклонение сигнала на входе и выходе цифрового фильтра соответственно.

Без потери общности можно предположить, что $\sigma_x = 1$. Определим степень характеристического полинома для первого цифрового фильтра как m=2 и значение нулей характеристического полинома для первого фильтра $j_1 = j_2 = 0.96$, при которых

$$\sigma_{y1} = \sqrt{\frac{0{,}04}{4.911}} = 0.09.$$

Увеличивая значения m, для второго фильтра можно получить зависимость относительного изменения значения Колмогоровской сложности для второго фильтра при заданных условиях, показанную на рис. 2.

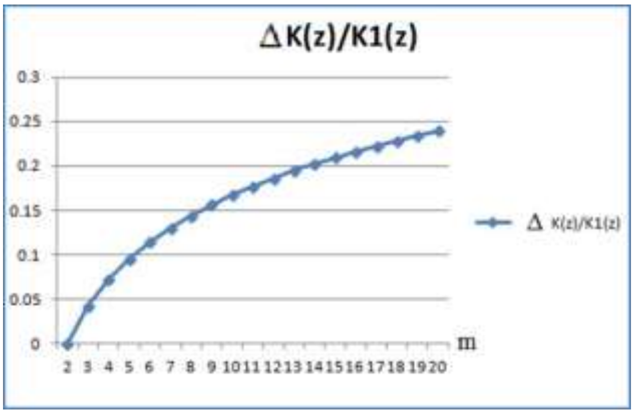

Рис. 2. Зависимость значений относительного изменения Колмогоровской сложности для цифрового фильтра (базовая точка $m = 2$, $j_1 = j_2 = 0.96$)

Если выбрать в качестве базовой точки показатели первого цифрового фильтра данного вида со степенью характеристического полинома $m = 5$, $j_1 = \ldots = j_5 = 0.96$, то изменяя параметр m для второго цифрового фильтра от $m = 2$ до $m = 20$, получим зависимость относительного изменения Колмогоровской сложности для второго фильтра, которая представлена на рис. 2.

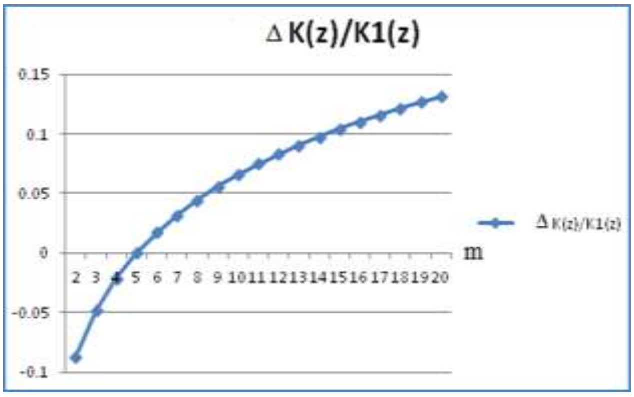

Рис. 3. Зависимость значений относительного изменения Колмогоровской сложности для цифрового фильтра (базовая точка $m = 5$, $j_1 = \ldots = j_5 = 0.96$)

Указанные зависимости получены для цифровых фильтров со значениями нулей характеристического полинома, для которых определены $j_1 = \ldots = j_m = 0.96$, что соответствует времени наблюдения входного сигнала, равного 74 тактам работы цифрового фильтра. Изменение сложности цифрового фильтра в данном случае реализуется изменением степени его характеристического полинома.

Исследования свойств цифровых фильтров с передаточной функцией более общего вида показывает, что наиболее существенное влияние на значения дисперсии случайной ошибки на выходе фильтра оказывает порядок N числителя передаточной функции. Порядок характеристического полинома затем определяется исходя из условий физической реализации фильтра [5].

Поскольку определение точной аналитической зависимости дисперсии случайной ошибки от степени числителя передаточной функции для фильтров данного класса является задачей весьма сложной и трудновыполнимой, то для оценки значений σ^2 как функции N воспользуемся приближенными выражениями, которые получим исходя из следующих соотношений.

При уменьшении нулей характеристического полинома фильтра до нуля рекурсивный цифровой фильтр вырождается в цифровой фильтр с конечной памятью N, причем значения коэффициентов числителя передаточной функции и дисперсии случайной ошибки соответственно совпадают с величинами, полученными в [6] при решении задач оптимизации цифровых фильтров с конечной памятью. Далее, если значения нулей характеристического полинома устремить к 1, то время наблюдения входного сигнала будет стремиться к бесконечности, а значение дисперсии случайной ошибки – к нулю. Таким образом, поведение дисперсии случайной ошибки на данном участке можно представить прямой, уравнение которой имеет вид

$$\sigma^2(N,j) = (1-j)\cdot\sigma^2(N,0),$$

где $\sigma^2(N,0)$ для принятых условий сглаживания помех, определяется выражением [6]:

$$\sigma^2(N,0) = \frac{1}{N+1}.$$

Оценку относительного изменение значений Колмогоровской сложности для данного класса фильтров получим для таких же условий, как и в предыдущем случае, то есть j= 0.96, а значения степени числителя N будем изменять от 1 до 20 (рис. 4).

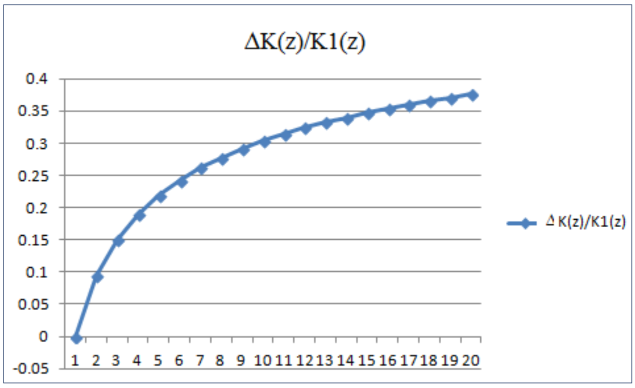

Рис. 4. Зависимость значений относительного изменения Колмогоровской сложности для цифрового фильтра (базовая точка $N = 1$, $j = 0.96$)

Если выбрать в качестве базовой точки показатели первого цифрового фильтра данного вида со степенью числителя передаточной функции $N = 5$ и $j = 0.96$, то, изменяя параметр N для второго цифрового от $N = 1$ до $N = 20$, получим зависимость относительного изменения Колмогоровской сложности для второго фильтра, которая представлена на рис. 5.

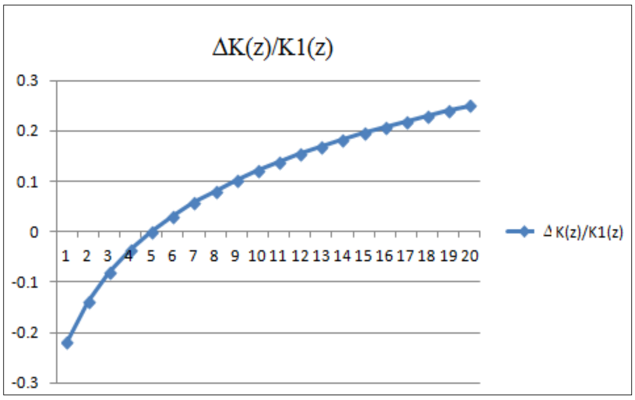

Рис. 5. Зависимость значений относительного изменения Колмогоровской сложности для цифрового фильтра (базовая точка $N = 5$, $j = 0.96$)

V. Заключение

В заключение отметим, что предложенные оценки могут быть полезны для сравнения различных способов построения цифровых устройств обработки информации и выбора наиболее эффективного варианта их практической реализации. В частности, можно отметить, что изменения числителя передаточной функции цифровых фильтров приводят к более существенным изменениям относительной оценки Колмогоровской сложности, поскольку это объясняется необходимостью выполнения условий физической реализации цифровых фильтров.

Список литературы

[1] Alexandr N. Gubin; Vladislav L. Litvinov; Felix V. Filippov. Estimation of Information Efficiency for Digital Information Processing Devices. Proceedings of 2020 23rd International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2020, 2020, pp. 11–13. DOI: 10.1109/SCM50615.2020.9198780.

[2] Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия "количество информации" // Проблемы передачи информации. 1965. Том 1. Выпуск № 1. С. 3-11.

[3] Верещагин Н.К. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность / Н.К. Верещагин, В.А.Успенский, А. Шень. М.: МЦНМО, 2013. 576 с.

[4] Губин А.Н. Оптимизация числа нулей характеристического полинома при синтезе цифровых фильтров. В сб. Проблемы системотехники и АСУ. Л.: СЗПИ, 1983 с. 112-115.

[5] Гольденберг Л.М., Левчук Ю.П., Поляк М.И. Цифровые фильтры. М.: Связь, 1974. 160 с.

[6] Перов В.П. Статистический синтез импульсных систем. М.: Сов. радио, 1959. 454 с.