

# Успех байесовской статистики в наблюдательной астрофизике

В. Л. Горохов<sup>1</sup>, И. А. Брусакова<sup>2</sup>

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

<sup>1</sup>E-mail: vlgorohov@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: brusakovai@mail.ru

**Аннотация.** В статье предлагается методика использования средств статистики Байеса с интегральной визуализацией когнитивных образов для обработки многомерных данных астрономических наблюдений. Эти методы весьма успешно применяются в астрофизике и могут быть использованы для широкого круга задач в BIG DATA. Методика такого сочетания может быть также сориентирована на выявление и прогнозирование чрезвычайных ситуаций в сложных системах. Предлагаемый подход байесовской интеграции и визуализации когнитивных образов основывается на статистических возможностях алгоритмов и программ, которые способны выявлять и объективировать в когнитивных вероятностных образах признаки различий в пространственной или временной структуре объектов наблюдения.

**Ключевые слова:** байесовские и когнитивные методы визуализации; многомерные временные ряды; 3-D машинная графика

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сопоставление данных экспериментов и теоретических моделей является магистральной задачей современного естествознания, техники и экономики. Это сопоставление, в настоящее время, осуществляется средствами BIG DATA. В свою очередь технологии BIG DATA опираются на концепции современной прикладной статистики (Байеса) [1–11]. Следует особо подчеркнуть, что обилие и богатство экспериментальных данных полученных в результате космологических обзоров перечисленных выше являют собой яркий пример BIG DATA [2–5].

Кроме того, успешность использования статистического подхода ярко проявила себя в прогрессе экспертных систем. Современный бум в области глубокого обучения нейронных сетей (ML – Machine Learning) во многом опять связывается с байесовским подходом и говорит о перспективности развития инструментов данного направления [6]. Кроме того, идея согласования прежних наблюдательных данных, теоретических моделей и текущих наблюдений позволяет частично объективировать когнитивные возможности человеческого сознания в рамках когнитивных наук на основе когнитивной машинной графики [7]. Подобная картина разворачивается и в других областях естествознания, например в физике элементарных частиц [2, 3], и даже в таких прикладных сферах, как доказательная медицина,

экономика и социология, где пока стихийно идут подобные процессы обработки BIG DATA.

### А. Концепция байесовского вывода и полного байесовского анализа в практической космологии

В реальной практике эксперимента сведения о распределениях  $P(x)$ ,  $P(\mu)$  часто отсутствуют, и приходится ограничиться только **функцией правдоподобия**  $P(x^*/\mu)$ . Эта ситуация зафиксирована в подходе **Неймана Пирсона** и учет обстоятельств эксперимента приходится «вписывать» в параметрическое описание условной функции распределения  $P(x/\mu)$  средствами концепции смещения. Напомним, что по результатам измерений можно таким образом описать целый набор физических величин в виде параметров распределений, формируя соответствующие условные распределения. Здесь появляется возможность рассматривать функцию правдоподобия и как функцию распределения плотности вероятности с фиксированными параметрами, и как функцию этих параметров. Часто термином **функция правдоподобия** обозначают именно последнюю физическую интерпретацию.

На этой интерпретации основано оригинальное использование **функции правдоподобия** при конструировании алгоритмов оценивания. В этой ситуации говорят о принципе **максимального правдоподобия**. Суть этого принципа давно известна в математической статистике и сводится к тому, что процедура оценивания параметра  $\theta$  распределения  $P_{\theta}(X_{\text{изм}})$  заменяется вычислением функции плотности распределения  $p(\theta, x^*)$ . Эта процедура предполагает, разумеется, наличие исходной выборки  $x^*$  на основе которой строится набор плотностей распределений  $\{p_{\theta}(x^*)\}$ . Такие оценки часто обладают свойствами несмещенности, эффективности и состоятельности. Полученные таким образом оценки и называются оценками **максимального правдоподобия (функция относительного правдоподобия)**. Функция  $L(\theta; x)$  является функцией параметра  $\theta$  и максимум этой функции «указывает» на значение  $\theta^{\wedge}$ , которое и является значением **оценки максимального правдоподобия**. Оценки максимального правдоподобия могут рассматриваться как решение **уравнения правдоподобия:**  $\partial/\partial\theta (p(x/\theta))=0$ .

Разумеется, что условное распределение формируется как следствие статистической зависимости между  $x$  и  $\mu$ . Фактически анализируется двумерное распределение  $p(x, \mu)$ . При этом  $p(x/\mu)$  является частной (маргинальной) одномерной плотностью распределения. Можно рассматривать и детализировать характер зависимости между СВ  $x$  и  $\mu$ . Например, задавать линейный характер статистической связи между этими СВ:  $x=a+b\mu$ , где  $a$  и  $b$  являются коэффициентами регрессии, которые тоже являются параметрами условного распределения  $p(x/\mu)$ . В этой ситуации функция правдоподобия будет включать и эти параметры  $L(\mu, x, a, b, \sigma_x, \sigma_\mu)$ . Здесь открывается возможность для маргинальной оценки методами максимального правдоподобия всего комплекса параметров. Помимо измеряемой величины  $\mu$  могут быть измерены и другие характеристики, что открывает возможности многомерного статистического анализа. Такой подход (названный **полным байесовским**), позволяет ввести многомерные функции правдоподобия, одномерные «срезы» которой образуют частные (маргинальные) распределения.

Пример [8–9] конкретного оценивания маргинальных параметров двумерного распределения реальных астрономических характеристик  $E_{iso}, E_{peak}$ , методом максимального правдоподобия показан на рис. 1. На основе обзоров гамма всплесков (GRB каталогов) измерены такие характеристики объектов как:  $E_{iso}$  – наблюдаемая изотропно-эквивалентная энергия излучения объекта, и  $E_{peak}$  – энергия пика в спектре излучения объекта (или пиковая энергия). Статистическая зависимость ( $E_{iso}-E_{peak}$ ) является ключевой (соотношение Амати) и позволяет задать «стандартную свечу», что дает возможность независимого определения расстояний до объектов в космологии. Таким образом, статистические средства измерения этой зависимости, основанные на наблюдательных данных GRB каталога, являются весьма актуальными. Оцениваются статистические связи между этими СВ:  $y=a+bx$ , зависимости двух измеряемых характеристик объектов  $y=E_{iso}$  и  $x=E_{peak}$ . Оценка коэффициента линейной регрессии  $a$ , осуществляется средствами максимального правдоподобия путем поиска максимальной функции правдоподобия  $L_a=L(a,b;x,y,\sigma)$ , имеем  $a=1,75$ . Аналогичным образом на основе функции правдоподобия  $L_\sigma=L(\sigma^2;x)$  можно оценить  $\hat{\sigma}^2=0,37$  (рис. 1). Еще один параметр регрессии  $b^{\wedge}=52,53$  может быть найден из решения уравнения:  $(\partial/\partial b)(L(a,b,\sigma^2;x))=0$ .

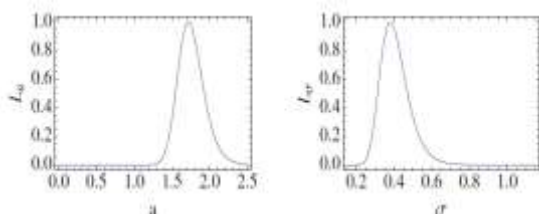


Рис. 1. Оценка  $a$  и  $\sigma$  на основе байесовской функции правдоподобия  $L(a;x), L(\sigma;x)$  [8, 9]

### В. Когнитивная компьютерная графика как дополнение полного байесовского анализа в практической космологии

Поскольку байесовский подход предполагает использование субъективного восприятия экспериментатора когнитивная наука в настоящее время предлагает графические инструменты визуализации многомерных данных и многомерных распределений этих данных для воздействия на сознание экспериментатора с целью помощи в принятии субъективных вероятностных решений [7]. Подобные графические инструменты позволяют мобилизовать когнитивные возможности человеческого сознания для поддержки субъективных вероятностных выводов в рамках Байесовской идеологии. В данной статье в качестве иллюстрации высказанного положения рассматривается пример использования такого когнитивного графического инструмента для визуализации многомерной функции правдоподобия  $p(x^{\wedge}/\mu)$  для конкретной задачи (рассмотренной выше) оценивания коэффициентов регрессионной зависимости (соотношение Амати) маргинальных параметров двумерного распределения реальных астрономических характеристик  $E_{iso}, E_{peak}$ , методом максимального правдоподобия. В этой задаче в GRB каталоге содержались для каждого объекта не только измеренные характеристики  $E_{iso}, E_{peak}$ , но и ряд других характеристик объектов. Так что функция правдоподобия, поэтому имеет многомерный характер и требуется убедиться в том, что остальные многомерные статистические связи не разрушают выявленную маргинальную регрессионную зависимость. Для этого использовался когнитивный инструмент динамической проекции многомерных данных на плоскость маргинальной зависимости  $E_{iso}, E_{peak}$  [4, 3, 5, 8, 9]. Результат когнитивной динамической проекции зависимости  $E_{iso}, E_{peak}$  из многомерного характеристик пространства параметров показан на рис. 2.

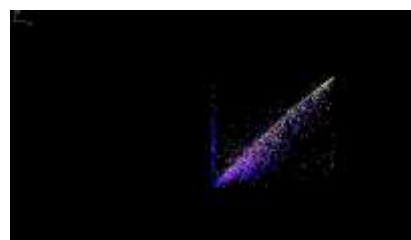


Рис. 2. Результат когнитивной динамической проекции маргинальной регрессионной зависимости  $E_{iso}, E_{peak}$ .

Анализ когнитивного образа показывает, что маргинальная регрессионная зависимость  $E_{iso}-E_{peak}$  имеет место быть, но с многомерной точки зрения, эта зависимость имеет характер многомерной линейной поверхности. Это подтверждает результаты оценки коэффициентов регрессии, полученных ранее средствами построения маргинальной функции правдоподобия. Однако следует учитывать возможность линейной статистической зависимости от некоторых характеристик объектов и наличия дополнительных независимых статистических связей между другими характеристиками объектов.

## II. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подобный разведочный Байесовский и когнитивный анализ данных экспериментов в многомерном пространстве характеристик изучаемых объектов позволяет экспериментатору более продуктивно использовать возможности своего образного мышления при формировании субъективных вероятностных выводов в задачах многомерной статистики.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Справочник по прикладной статистике. Под ред. Э.Ллойда, У.Ледермана. М.: Финансы и статистика, 1990. 526 с.
- [2] Agostini G. Bayesian reasoning in physics CERN 99-03, July 1999.
- [3] Lemm J. Bayesian field theory. The Johns Hopkins University Press, Published 2003
- [4] Baryshev Y.; Teerikorpi P. Fundamental Questions of Practical Cosmology: Exploring the 212 Realm of Galaxies; Vol. 383, Astrophysics and Space Science Library, Springer: Berlin, 2012. 213 doi:10.1007/978-94-007-2379-5
- [5] Roberto Trotta. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology Oxford University, Astrophysics Department Denys Wilkinson Building, Keble Rd, Oxford, OX1 3RH, UK (November 23, 2008)
- [6] Николенко С., Кадури А., Архангельская Е. Глубокое обучение, погружение в мир нейронных сетей СПб.: Питер, 2020. 480 с.
- [7] Горохов В.Л., Муравьев И.П. Когнитивная машинная графика. Методы динамических проекций и робастная сегментация многомерных данных: Монография. Под ред. проф. А.И. Михайлушкина. СПб. СПбГИЭУ, 2007. 172с.
- [8] Marek Demianski, Ester Piedipalumb, Disha Sawant, and Lorenzo Amati. Cosmology with gamma-ray bursts I. The Hubble diagram through the calibrated Epi–Eiso correlation A&A 598, A112 (2017) DOI: 10.1051/0004-6361/201628909 с ESO 2017
- [9] Loredo T.J. From Laplace to Supernova SN 1987A: Bayesian Inference in Astrophysics, in T. Fougere (Editor) Maximum-Entropy and Bayesian Methods, Available from: <http://bayes.wustl.edu/gregory/articles.pdf> (accessed Jan 15 2008) (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1990), pp. 81–142.