# Адаптивное робастное управление многостепенным механическим объектом с упругими свойствами и параметрической и функциональной неопределенностью

Ле Хонг Куанг<sup>1</sup>, В. В. Путов<sup>2</sup>, В. Н. Шелудько, Т. Л. Русяева Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) <sup>1</sup>quang180880@gmail.com, <sup>2</sup>vvputov@mail.ru

Аннотация. В докладе рассмотрены вопросы построения адаптивной робастной системы управления по состоянию многостепенным нелинейным механическим объектом с упругими свойствами в условиях параметрической и функциональной неопределенности с приведением нелинейной математической модели объекта к каскадной структуре и ее аффинной параметризации относительно матриц неизвестных параметров. Синтез адаптивной робастной системы осуществляется методом адаптивного обхода интегратора с функциями настройки, объединенным с целью упрощения пошаговых процедур с методом регуляризации алгоритмами параметрической проекции и методом замены громоздких вычислений аналитических выражений «чистых» производных виртуальных управлений на каждом шаге их отфильтрованными аналогами. Приводятся результаты цифровой реализации построенной адаптивной робастной системы управления траекторным движением четырехстепенного манипуляционного робота на базе зарегистрированных авторских программ в среде MATLAB/Simulink.

Ключевые слова: многостепенной механический объект с упругими свойствами, адаптивное робастное управление, каскадная структура, метод адаптивного обхода интегратора с функциями настройки, алгоритмы с параметрической проекцией, отфильтрованные аналоги виртуальных (пошаговых) управлений

#### I. Введение

Широкое распространение в мире получили методы регуляризации (или огрубления), т.е. придания робастных свойств «чисто интегральным» адаптивным алгоритмам, обеспечивающим асимптотическую (или лаже экспоненциальную) стабилизацию равновесных состояний адаптивных систем в идеальных условиях постоянства неизвестных параметров объектов и отсутствия внешних возмущений. Методы регуляризации базовых адаптивных алгоритмов «чисто интегрального типа» с помощью отрицательных постоянных или переключающихся параметрических обратных связей, названные соответственно методами σ-модификации или σмодификации с переключением [1-3], а также с помощью

алгоритмов с так называемой параметрической проекцией (parameter projection operator) [4] получили широкое распространение в адаптивных робастных схемах управления. Однако недостатком указанных методов регуляризации является трудность определения условий обеспечения малости радиуса предельного множества путем регулирования параметров σ-модификации, что приводит даже к таким парадоксальным явлениям, когда ослабление обратных σ-связей вызывает редкие, но большие по амплитуде «всплески» ошибок стабилизации (так называемого «взрывного эффекта» (bursting phenomenon)) [5]. В последние десятилетия широкое развитие получили новые подходы к синтезу адаптивных, адаптивных робастных и нелинейных робастных систем управления нелинейными объектами, преодолевающие структурные препятствия, возникающие при нарушении «условий согласования», или принципа непосредственной компенсации (когда неопеределенности и сигналы управления появляются в разных уравнениях объекта). Они объединяют пошаговые процедуры синтеза законов управления и алгоритмов их адаптации, основаны на параметризации нелинейных объектов и приведении их к нижнетреугольной форме и получили общее название методов адаптивного обхода интегратора (adaptive integrator backstepping) [6, 7]. В то же время, регуляторы, синтезируемые на основе адаптивного обхода интегратора, характеризуются при возрастании числа шагов буквально (по меткому выражению в [7]) «взрывной сложностью» как по процедуре синтеза, так и по самим получаемым законам управления и алгоритмам их настройки (адаптации). Это привело к предложениям по сокращению громоздких аналитических вычислений, появляющихся на каждом шаге «чистых» производных виртуальных управлений, заменяя их отфильтрованными аналогами [8, 9]. В докладе рассматриваются вопросы управления многостепенным нелинейным механическим объектом с упругими свойствами в условиях параметрической и функциональной неопределенности. Предлагается адаптивная робастная система управления многостепенным нелинейным механическим объектом с упругими свойствами, синтезированная на основе упрощения метода адаптивного обхода интегратора с привлечением методов фильтрации и параметрической проекции.

## II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОСТЕПЕННОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ

Дифференциальные уравнения, описывающие движение многостепенного механического объекта с упругими свойствами, имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_{c}(\mathbf{q}_{d} - \mathbf{q}); \\ \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}_{d} + \mathbf{K}_{c}(\mathbf{q}_{d} - \mathbf{q}) = \mathbf{u}, \end{cases}$$
(1)

где  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  – вектор углов вращения звеньев;  $\mathbf{q}_{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^n$  – вектор углов вращения приводных частей;  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – функциональная матрица инерции, неособенная, симметричная и положительно определенная для всех **q**;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – функциональная матрица кориолисовых и центробежных сил;  $\mathbf{D}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n}$  – вектор-функция гравитационных сил; **К**<sub>c</sub>;**Ј** – диагональные числовые матрицы, определяемые соответственно коэффициентами упругости трансмиссий и моментами инерции приводных  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ \_ частей; электромагнитные моменты, создаваемые силовыми приводами в сочленениях, *n* – число степеней.

Систему уравнений (1) можно переписать в виде [10]

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}; \\ \mathbf{J}_{\tau}\ddot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u} - f(\ddot{\mathbf{q}}), \end{cases}$$
(2)

где  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_c(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}); \mathbf{J}_t = \mathbf{J}\mathbf{K}_c^{-1}; f(\mathbf{\ddot{q}}) = \mathbf{J}\mathbf{\ddot{q}}$ . Предполагается, что объект полностью управляем и наблюдаем, а все переменные  $\mathbf{q}, \mathbf{\dot{q}}, \mathbf{q}_d, \mathbf{\dot{q}}_d$  доступны измерению.

Преобразуя уравнения упругого механического объекта (1), (2) к форме Коши  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{x}_3 = \tau$ ,  $\mathbf{x}_4 = \dot{\tau}$ , приведем их к каскадной структуре следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2; \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{x}_3 - \mathbf{C}\mathbf{x}_2 - \mathbf{D}]; \\ \dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_4; \dot{\mathbf{x}}_4 = \mathbf{J}_t^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{x}_3 - f), \end{cases}$$
(3)

где  $M=M(\mathbf{x}_1)$ ;  $C=C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ ;  $D=D(\mathbf{x}_1)$ ;  $f = f(\dot{\mathbf{x}}_2)$ .

Система уравнений (3) имеет блочную каскадную структуру, что позволяет использовать метод адаптивного обхода интегратора к построению адаптивной робастной системы управления [6,7,12].

Определение алгоритма параметрической проекции. Пусть вектор коэффициентов  $\boldsymbol{\theta}$  принадлежит компактному выпуклому множеству  $\Omega := \left\{ \boldsymbol{\theta} : \|\boldsymbol{\theta}\| \le \theta_o \right\}$ , где  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}} -$ ошибка оценки вектора коэффициентов  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Стандартный оператор непрерывного (нормализованного) проектирования по Липшицу определяется как

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = Proj(\boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}, \text{ если } p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) < 0; \\ \left[ I - \frac{p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T}{\left\| \nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\|^2} \right] \boldsymbol{\mu}, \text{ если } p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \ge 0 \text{ и } \nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \boldsymbol{\mu} > 0 \end{cases}$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(4)$$

$$(6)$$

$$(6)$$

$$(6)$$

$$(6)$$

$$(6)$$

$$(6)$$

$$(7)$$

$$(6)$$

$$(6)$$

$$(6)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(6)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

$$(7)$$

где  $\mu(t) \in \mathbb{R}^{p}$  – известная, *n* раз непрерывно дифференцируемая ( $\mathbb{C}^{n}$ ) функция;  $p(\hat{\theta}) = \frac{\|\hat{\theta}\|^{2} - \theta_{0}^{2}}{\varepsilon^{2} + 2\varepsilon\theta_{0}}$ ; *I* – единичная матрица;  $\varepsilon, \theta_{0}$  – произвольные положительные константы;  $\nabla p(\hat{\theta})$  – градиент функции *p* по  $\hat{\theta}$ ;  $\|\cdot\|$  – евклидова норма.

**Фильтрация виртуальных управлений.** Пусть  $a_i$  и  $a_i^C \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1,3}$ , являются виртуальными управлениями и их отфильтрованными аналогами соответственно. Фильтрация виртуального управления  $a_i$  для создания отфильтрованных аналогов  $a_i^C$  и их производных  $\dot{a}_i^C$  осуществляется фильтром второго порядка вида [8, 9]

$$\left\{ \dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2; \dot{\mathbf{e}}_2 = -2\nu b \mathbf{e}_2 + b^2 (\mathbf{a}_i - \mathbf{e}_1), \right.$$
(5)

где при  $\mathbf{e}_1(0) = \mathbf{a}_i(0)$  и  $\mathbf{e}_2(0) = 0$  будет  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_i^c, \mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{a}}_i^c; b \in \mathbb{R}^+$ – собственная частота фильтра;  $v \in \mathbb{R}^+$  – коэффициент затухания;  $i = \overline{1, 3}$ .

Отметим, что предложение в методах синтеза обратным обходом интегратора вместо появляющихся на каждом, начиная со второго, шаге синтеза «чистых» (физически нереализуемых) производных виртуальных управлений  $\dot{a}_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , использовать их «реальные» производные  $\dot{a}_i^C$  (отфильтрованные аналоги) позволяет значительно сократить объем громоздких вычислений «чистых» производных  $\dot{a}_i$  по аналитическим выражениям.

III. Синтез адаптивного робастного управления, построенное упрощенным методом адаптивного обхода интегратора с алгоритмами параметрической проекции и отфильтрованными производными виртуальных управлений

Введем новые переменные (ошибки слежения)  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_r$ ;  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1^c$ ;  $\mathbf{z}_3 = \mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2^c$ ;  $\mathbf{z}_4 = \mathbf{x}_4 - \boldsymbol{\alpha}_3^c$ , где  $\mathbf{x}_r$  – желаемый сигнал  $\mathbf{x}_1$ . Определим ошибки фильтрации  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i = \boldsymbol{\alpha}_i^c - \boldsymbol{\alpha}_i, i = \overline{1,3}$ , и введем положительно определенные симметричные матрицы  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , являющиеся параметрами отрицательных обратных связей и выбираемые из условий устойчивости синтезируемой системы. Шаг 1. Запишем уравнение для производной  $\dot{\mathbf{z}}_1 = \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_r$ , и принимая во внимание (3), получим

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1^C - \dot{\mathbf{x}}_r \,. \tag{6}$$

Выберем виртуальные управление  $\alpha_1 = -\mathbf{c}_1 \mathbf{z}_1 + \dot{\mathbf{x}}_r$ . (7)

Подставляя (7) в (6), получим 
$$\dot{\mathbf{z}}_1 = -\mathbf{c}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$$
. (8)

На первом шаге отфильтрованный аналог  $a_1^c = a_1$ , т.е.

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{1}^{c} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{1} = -\mathbf{c}_{1}(\dot{\mathbf{x}}_{1} - \dot{\mathbf{x}}_{d}) + \ddot{\mathbf{x}}_{r}.$$
<sup>(9)</sup>

Шаг 2. Запишем уравнение для производной  $\dot{\mathbf{z}}_2 = \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2^c$ , и, принимая во внимание (3), получим

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{x}_3 - \mathbf{C} \mathbf{x}_2 - \mathbf{D} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{a}}_1^c \right], \tag{10}$$

где производная  $\dot{a}_1^c$  вычисляется по (9)

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{1}^{c} = -\mathbf{c}_{1}(\mathbf{x}_{2} - \dot{\mathbf{x}}_{d}) + \ddot{\mathbf{x}}_{r}.$$
(11)

Параметры модели **M**, **C** и **D** уравнения Лагранжа (1) неизвестны, поэтому введем афинную параметризацию относительно неизвестной  $m \times n$ -матрицы  $\Theta_{\alpha}$ , удовлетворяющую равенству вида:

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{1}^{C} + \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}_{1}^{C} + \mathbf{D} = \boldsymbol{\Theta}_{\alpha}^{T}\boldsymbol{\varphi}_{\alpha} , \qquad (12)$$

где  $\mathbf{\Theta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{\theta}_{\alpha_1}, \mathbf{\theta}_{\alpha_2}, ..., \mathbf{\theta}_{\alpha_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  – неизвестная постоянная матрица со столбцами  $\mathbf{\theta}_{\alpha_i} \in \mathbb{R}^m, (i = \overline{1, n});$ 

 $\boldsymbol{\varphi}_{\alpha} = \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\alpha}_1^c, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^c) \in R^{m \times 1}$  – известная векторфункция – регрессор.

Получим с помощью (локальной) функции Ляпунова вида  $V_{\alpha} = 0,5 \left[ z_2^T z_2 + \sum_{i=1}^n (\theta_{\alpha i} - \hat{\theta}_{\alpha i})^T \Gamma_{\alpha i}^{-1} (\theta_{\alpha i} - \hat{\theta}_{\alpha i}) \right]$  на шаге 2 виртуальные функции настройки столбцов-оценок  $\hat{\theta}_{\alpha_i}$  матрицы  $\hat{\Theta}_{\alpha}$  вида  $\dot{\hat{\theta}}_{\alpha_i} = -\Gamma_{\alpha_i} z_{2,i} \phi_{\alpha}, i = \overline{1, n}$ , где  $z_{2,i} - i$ ый элемент вектора  $\mathbf{z}_2$ , и воспользуемся для регуляризации полученных уравнений настройки «чисто интегрального типа» непрерывными липшицевыми алгоритмами параметрической проекции вида (4):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha i} = \boldsymbol{\Gamma}_{\alpha i} \operatorname{Pr} oj(-z_{2,i} \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha i}), i = \overline{1, n}.$$
(13)

Закон виртуального управления на шаге 2 примем в виде

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = -\mathbf{z}_1 - \mathbf{c}_2 \mathbf{z}_2 + \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{\alpha}^T \boldsymbol{\varphi}_{\alpha} , \qquad (14)$$

где матрица  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha_1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha_2}, ..., \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha_n} \end{bmatrix} \in R^{m \times n}$  со столбцами  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha i} \in R^m, i = \overline{1, n}$ , является матрицей-оценкой матрицы  $\boldsymbol{\Theta}_{\alpha}$ . Подставляя (14) в (10) и полагая  $\boldsymbol{\Theta}_{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{\alpha} = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{\alpha}$  получим

$$\dot{\mathbf{z}}_{2} = \mathbf{M}^{-1} \left[ -\mathbf{z}_{1} - \mathbf{c}_{2}\mathbf{z}_{2} + \mathbf{z}_{3} + \tilde{\mathbf{\alpha}}_{2} - \mathbf{C}\mathbf{z}_{2} + \tilde{\mathbf{\Theta}}_{\alpha}^{T} \mathbf{\varphi}_{\alpha} \right].$$
(15)

Шаг 3. Запишем уравнение для производной  $\dot{\mathbf{z}}_3 = \dot{\mathbf{x}}_3 - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2^c$  и принимая во внимание (3), получим

$$\dot{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{x}_4 - \dot{\mathbf{\alpha}}_2^C = \mathbf{z}_4 + \mathbf{\alpha}_3^C - \dot{\mathbf{\alpha}}_2^C = \mathbf{z}_4 + \tilde{\mathbf{\alpha}}_3 + \mathbf{\alpha}_3 - \dot{\mathbf{\alpha}}_2^C$$
. (16)  
Выберем виртуальный закон управления в виде

$$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{c}_3 \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2 + \dot{\mathbf{a}}_2^c \,. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), получим

$$\dot{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{z}_4 - \mathbf{c}_3 \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3.$$
(18)

Шаг 4. Запишем уравнение для производной  $\dot{\mathbf{z}}_4 = \dot{\mathbf{x}}_4 - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_3^c$  и принимая во внимание (3), получим

$$\dot{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{J}_t^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{x}_3 - f - \mathbf{J}_t \dot{\mathbf{a}}_3^c).$$
(19)

Постоянные параметры функциональных матриц **J** и  $\mathbf{J}_t$  неизвестны, поэтому построим линейно (афинно) параметризованную относительно неизвестной матрицы  $\boldsymbol{\Theta}_t$  модель вида

$$\mathbf{x}_3 + f + \mathbf{J}_t \dot{\boldsymbol{\alpha}}_3^C = \boldsymbol{\Theta}_t^T \boldsymbol{\varphi}_t \,, \tag{20}$$

где  $\boldsymbol{\Theta}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{t_1}, \boldsymbol{\theta}_{t_2}, ..., \boldsymbol{\theta}_{t_n} \end{bmatrix} \in R^{3n \times n}$  – неизвестная постоянная матрица со столбцами  $\boldsymbol{\theta}_{ti} \in R^{3n}, i = \overline{1, n};$  $\boldsymbol{\varphi}_t = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_3, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_3^c) \in R^{3n}$  – известный регрессор.

Получим с помощью (локальной) функции Ляпунова вида  $V_t = 0, 5 \left[ z_4^T z_4 + \sum_{i=1}^n (\mathbf{\theta}_{ti} - \hat{\mathbf{\theta}}_{ti})^T \mathbf{\Gamma}_{ti}^{-1} (\mathbf{\theta}_{ti} - \hat{\mathbf{\theta}}_{ti}) \right]$ на шаге 4 виртуальные функции настройки столбцов-оценок  $\hat{\mathbf{\theta}}_{ti}$  матрицы  $\hat{\mathbf{\Theta}}_t$  вида  $\dot{\hat{\mathbf{\theta}}}_{ti} = -\mathbf{\Gamma}_{ti} z_{4,i} \mathbf{\varphi}_t, i = \overline{1,n}$ , где  $z_{4,i} - i$ ый элемент вектора  $\mathbf{z}_4$ , и воспользуемся для регуляризации полученных уравнений настройки «чисто интегрального типа» непрерывными липшицевыми алгоритмами параметрической проекции вида (4):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ti} = \boldsymbol{\Gamma}_{ti} \operatorname{Pr} oj(-z_{4,i} \boldsymbol{\varphi}_t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{ti}), i = \overline{1, n}.$$
(21)

Финальный закон управления примем в виде

$$\mathbf{u} = -\mathbf{c}_4 \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 + \hat{\mathbf{\Theta}}_t^T \mathbf{\varphi}_t , \qquad (22)$$

где матрица  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_t = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t_1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t_2}, ..., \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t_n}\right] \in R^{3n \times n}$  со столбцами

 $\hat{\mathbf{\theta}}_{ti} \in R^{3n}, i = \overline{1, n}$ , является матрицей-оценкой матрицы  $\mathbf{\Theta}_t$ . И наконец, подставляя (22) в уравнение (19), получим

$$\dot{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{J}_t^{-1}(-\mathbf{c}_4\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 - \tilde{\mathbf{\Theta}}_t^T \mathbf{\phi}_t), \mathbf{\Theta}_t - \hat{\mathbf{\Theta}}_t = \tilde{\mathbf{\Theta}}_t.$$
 (23)  
Подытоживая результаты синтеза, соберем воедино:

a) уравнения замкнутой системы в *z<sub>i</sub>*-координатах (*i*=1,2,3,4) вида (8), (15), (18) и (23);

б) уравнения законов управления вида (7),(14), (17) и (22);

в) отфильтрованные аналоги  $\boldsymbol{a}_{i}^{c}$  и  $\dot{\boldsymbol{a}}_{i}^{c}$ , виртуальных управлений  $\boldsymbol{a}_{i}, i = 2, 3$ , генерируемые фильтрами второго порядка вида (5) ( $\boldsymbol{a}_{1}^{c} = \boldsymbol{a}_{1}$ );

г) адаптивные робастные алгоритмы с параметрической проекцией для настройки оценочных матриц коэффициентов (13), (21).

#### IV. Результаты компьютерного моделирования

Исследование моделированием проводилось на модели четырехстепенного механического упругого манипуляционного робота [12].



Рис. 1.

На рис. 1 показаны переходные процессы: a - c линейным (подчиненным) управлением;  $\delta$  – с адаптивным робастным управлением. Штриховыми линиями показаны реальные кривые  $q_i(t)$ , показывающие, что в рассматриваемой следящей системе возникают упругие колебания со второй парциальной собственной частотой  $f_{2i}$ ,  $i = \overline{1,4}$  [11], обусловленной «закреплённым» первым диском (электродвигателя), а сплошными линиями показаны программные кривые  $q_{ir}(t) = 1(t)$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

Исследование трехмерных траекторий в виде плоских замкнутых гладких кривых







Рис. 3.

На рис. 2,3 показаны результаты отработки манипулятором плоских программных траекторий при двух значениях коэффициентов упругости  $K_c *4$ ;  $K_c / 4$  и двух значений массы  $m_4$ ;  $5*m_4$  четвертого сочленения (схвата):

### 1. $m_{4}$ ; 5\* $m_{4}$ – см. рис 2,а,б; 2. $K_{c}$ \*4; 5\* $m_{4}$ – см. рис 3,а,б.

Каждый рисунок содержит 2 экранные реализации: *а* – с линейным управлением; *б* – с адаптивным робастным управлением. В каждой экранной реализации помещены по две траектории: программное – сплошная линия и реальное движение – штриховая линия. Из рисунков 2*a*, 3*a* видно, что реальные траектории значительно отклоняются от программных, поэтому реальные траектории с линейным управлением неудовлетворительны.

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В докладе рассмотрена задача упрощенного построения адаптивных робастных систем управления неопределенным многостепенным нелинейным механическим объектом с упругими свойствами на основе адаптивного обхода метода интегратора c отфильтрованными аналогами пошаговых управлений и регуляризацией непрерывными липшицевыми алгоритмами параметрической проекции. По результатам проведенных исследований можно сделать следующее заключение: адаптивные робастные системы построенные по предлагаемой упрощенной пошаговой процедуре, базирующейся на объединении метода адаптивного обхода интегратора с методами фильтрации «чистых» производных виртуальных пошаговых управлений и пошаговой регуляризации интегральных алгоритмов адаптации с помощью параметрической проекции, гораздо менее трудоемки в синтезе и значительно проще в структурной и программной реализации, чем аналогичные адаптивные робастные системы, синтезированные стандартным методом адаптивного обхода интегратора с функциями настройки, и почти не уступают им в эффективности, по крайней мере, при их сравнительном 5-ти рассмотрении в кратной интервальной неопределенности.

#### Список литературы

 Nikiforov V.O., Adaptive nonlinear servocompensation of unknown extremal disturbance. 14-th IFAC World Congress. Beijing, China, 1999. Vol. I.P., P. 283-289.

- [2] Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. Nonlinear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
- [3] Iuannon P.A., Kokotovic, P.V. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control. Automatica. 1984. Vol.20, №5, P583-594.
- [4] Z. Cai, M.S. de Queiroz, D.M. Dawson. A sufficiently smooth projection operator. IEEE. Transactionson Automatic Control. Vol.51, №1. 2006.
- [5] His L., Costa R.R. Bursting phenomena in continuous-time adaptive sistems with a σ-modification. IEEE Trans.on Autom. Control. 1987. Vol. 32. №1. P84-86.
- [6] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.V. Adaptive Nonlinear Control Without Overparametrization /Systems and Control Letters. 1992. Vol.19. P. 177-185.
- [7] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.V. Nonlinear and Adaptive Control Design. N.Y.: John Wiley and Sons. New York. 1995.

- [8] Farrell J. A., Polycarpou M., Sharma M., and Dong W. Command filtered backstepping. IEEE TAC, vol. 54, no. 6, P1391–1395, 2009
- [9] Dong W., Farrell J. A., Polycarpou M. M., Djapic V., and Sharma M. Command filtered adaptive backstepping. IEEE Trans. Control Syst. Technol., vol. 20, no. 3, pp. 566–580, May 2012
- [10] Spong M. W. Modeling and Control of Elastic Joint Robots, Trans. of ASME, J of Dynamics Syst. Mech. and Control, Vol.109, P310-319, Dec. 1987
- [11] В.В. Путов, В.Н. Шелудько. Адаптивные и модальные системы управления многомассовыми нелинейными упругими механическими объектами. – СПб.: Изд-во «Элмор», 2007. – 243 с
- [12] Le Hong Quang, Putov V. V., Sheludko V. N. Multi-degree-of-freedom nonlinear mechanical plant adaptive control. International Scientific Conference «FarEastCon-2020». October 6-9, 2020, Vladivostok, Russia.