Метрологические испытания результатов измерения вероятностных характеристик случайных процессов

О. А. Микус[1], Е. С. Сулоева[2], Э. И. Цветков[3]
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
[1]sadalphamiks@gmail.com, [2]suloewa@list.ru, [3]er-cvetkov@mail.ru

***Аннотация*. Рассматривается задача аттестации результатов измерения вероятностных характеристик в рамках метрологических испытаний, целью которых является определение оценки погрешности. Далее проводится верификация вероятностных характеристик с целью изучения достоверности получаемых оценок.**

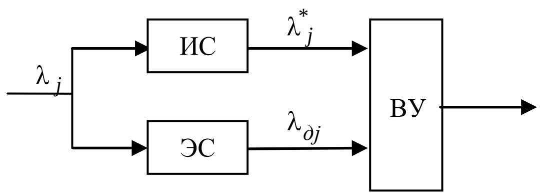
Ключевые слова: метрология; математическая модель; результат измерения; достоверность; точность; вероятностные характеристики; метрологический анализ

I. Введение

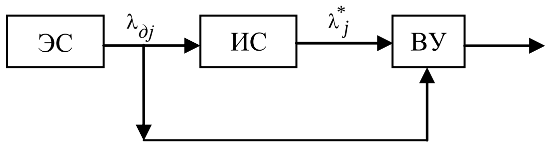
Метрологические испытания [1] представляют собой особый вид метрологического эксперимента, включающий в себя работу, как с аппаратной, так и с процессорной частью. Математическое обеспечение метрологических испытаний решает две основных задачи – обеспечивает возможность выполнения процедур определения требуемых характеристик результатов (погрешностей результатов) измерений, а также определения характеристик достоверности результатов метрологических испытаний.

При этом математическое обеспечение некоторой предметной области выполняет функции справочника. В частности математическое обеспечение метрологических испытаний представляет пользователю алгоритмическое и программное обеспечение процедур определения характеристик результатов (погрешностей) измерений и характеристик достоверности результатов метрологических испытаний. Так основные принципы построения измерительных систем [2] обязательно включат в себя оценочные характеристики результатов измерения применительно к отдельным каналам системы. Подобного рода исследования измерительных каналов ставят перед собой задачу обеспечения метрологической исправности [3], что представляется затруднительным при большим числе каналов разнородных величин. То есть конечному пользователю необходимо формировать алгоритм процедуры испытаний и определения характеристик достоверности.

Математическое и программное обеспечение для определения погрешности [4] может быть унифицировано для обобщенной схемы измерительного канала. Однако, в отличие от расчетных методов и методов с использованием имитационного моделирования, предполагающих выполнение только числовых преобразований (характеристик используемых моделей), метрологические испытания включают в себя и преобразования аналоговых сигналов, обеспечивающие формирование массивов результатов измерений $\{\lambda^*_j\}_j^N$ и соответствующих действительных значений $\{\lambda_{\partial j}\}_1^N$, т. е. результатов совместных измерений. Соответственно, в состав средства метрологических испытаний входят как аппаратные, так и программные средства [5]. В зависимости от организации метрологических испытаний различаются следующие структурные схемы:



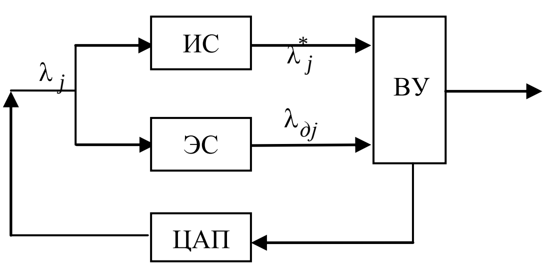
или



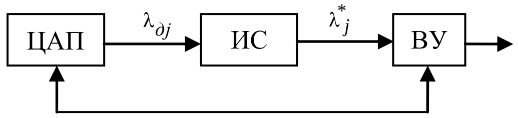
Принятые обозначения: ИС – измерительное средство (объект испытаний), ЭС – эталонное средство, ВУ - вычислительное устройство.

Развитие современных информационных метрологий позволяет формировать требуемое входное воздействие с помощью цифро-аналогового преобразования трансформированной последовательности, генерируемой датчиком случайных чисел, входящим в состав математического обеспечения ВУ. При этом вычислительное устройство совместно с ЦАП формирует тестовое воздействие.

Таким образом, в структурных схемах и последовательности отображений, выполняемых при проведении метрологических испытаний, происходят модификации следующего вида:



или



$$\{\lambda^*_j,\lambda_{\partial j}\}_1^N \to \{\Delta^*\lambda^*_j\}_j^N = \{\lambda^*_j-\lambda_{\partial j}\}_1^N \to \{g[\Delta^*\lambda^*_j]\}_1^N \to$$

$$\to \Theta^*[\Delta\lambda^*_j] = \sum_{j=1}^N g[\Delta^*\lambda^*_j]/N\,,$$

составляющих процедуру формирования оценки требуемой вероятностной характеристики погрешности $\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]$, массив $\{\lambda^*_j,\lambda_{\partial j}\}_1^N$ формируется аппаратными средствами, а остальные операции выполняются процессорными модулями. Иначе говоря, $\{\lambda^*_j,\lambda_{\partial j}\}_1^N$ играет роль априорных знаний для числовых преобразований, выполняемых в процессе метрологических испытаний.

II. Формализованное описание

Очевидно, что состав АЗ определяется числом модификаций объектов метрологических испытаний. Пусть входное воздействие составляется суммой полезного сигнала (*γ*) и аддитивной помехи *n*.

При этом полезный сигнал может быть постоянным (*n*= const) или переменным (*γ* = var). Аддитивная помеха стационарная с некоррелированными отсчетами (n_{ij}) или стационарная с коррелированными отсчетами ($n_{ij} + bn_{i-1,j}$) или нестационарная с некоррелированными отсчетами (a_{ij} n_{ij}), или нестационарная с коррелированными отсчетами ($a_{ij}\, n_{ij} + ba_{i-1}n_{i-1,j}$)

$$\gamma'_j(t)+n_j(t) = \text{const + снк: } \{\gamma'_j+n_{ij}\}_{i=1}^I\,,$$

$$\gamma'_j(t)+n_j(t) = \text{const +нснк: } \{\gamma'_j+a_{ij}n_{ij}\}_{i=1}^I\,,$$

$$\gamma'_j(t)+n_j(t) = \text{const + ск: } \{\gamma'_j+n_{ij}+bn_{i-1,j}\}_{i=1}^I\,,$$

$$\gamma'_j(t)+n_j(t) = \text{const +нск:} \{\gamma'_j+a_{ij}n_{ij}+ba_{i-1}n_{i-1,j}\}_{i=1}^I\,.$$

$$\gamma'_j(t)+n_j(t) = \text{var + снк: } \{\gamma'_j+k_j(i-1)+n_{ij}\}_{i=1}^I\,,$$

$$\gamma'_j(t)+n_j(t) = \text{var +нснк: } \{\gamma'_j+k_j(i-1)+a_{ij}n_{ij}\}_{i=1}^I\,,$$

$$\gamma'_j(t)+n_j(t) = \text{var + ск: } \{\gamma'_j+k_j(i-1)+n_{ij}+bn_{i-1,j}\}_{i=1}^I\,,$$

$$\gamma'_j(t)+n_j(t) = \text{var +нск: } \{\gamma'_j+k_j(i-1)+a_{ij}n_{ij}+$$

$$+ba_{i-1}n_{i-1,j}\}_{i=1}^I\,.$$

(Здесь n_{ij} – стационарная помеха с некоррелированными отсчетами).

Если m_λ – число модификаций входных воздействий, то в принятом конкретизированном случае $m_\lambda = 8$.

Применительно к основным вероятностным характеристикам погрешности ($M[\Delta\lambda^*_j]$, $D[\Delta\lambda^*_j]$, $P[\Delta\lambda^*_j \in [\Delta_1,\Delta_2]]$) имеем:

$M^*[\Delta\lambda^*_j] = \sum_{j=1}^N \Delta^*\lambda^*_j/N$ – для математического ожидания погрешности;

$D[\Delta\lambda^*_j] = \sum_{j=1}^N (\Delta^*\lambda^*_j - M[\Delta\lambda^*_j])^2/(N-1)$ – для дисперсии погрешности;

$P[\Delta\lambda^*_j \in [\Delta_1,\Delta_2]] = \sum_{j=1}^N \psi[\Delta^*\lambda^*_j]/N$ – для вероятности принадлежности погрешности интервалу $[\Delta_1,\Delta_2]$ ($\Delta\lambda^*_j \in [\Delta_1,\Delta_2] \to \Delta\psi = 1,\ \Delta\lambda^*_j \notin [\Delta_1,\Delta_2] \to \Delta\psi = 0$).

В данном случае число модификаций определяемых вероятностных характеристик погрешностей $m_\Theta = 3$.

При оценивании вероятностной характеристики погрешностей результатов измерений $\Theta[\Delta\lambda^*_j]$ оценка $\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]$ ($\Theta^*[\Delta\lambda^*_j] = \sum_{j=1}^N g[\Delta^*\lambda^*_j]/N$) отличается от истинного значения определяемой характеристики. Ошибка $\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]$ равна разности

$$\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j] = \Theta^*[\Delta\lambda^*_j] - \Theta[\Delta\lambda^*_j] =$$

$$= \sum_{j=1}^N g[\Delta^*\lambda^*_j]/N - \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N g[\Delta\lambda^*_j]/N,$$

а оценка ошибки –

$$\delta^*\Theta^*[\Delta\lambda^*_j] = \sum_{j=1}^N g[\Delta^*\lambda^*_j]/N - \sum_{j=1}^{N_1} g[\Delta\lambda^*_j]/N_1, N_1 >> N.$$

Данная ошибка является мерой достоверности результатов метрологического эксперимента (заметим, что погрешность результата измерений – мера точности измерений). Вероятностные характеристики ошибки определяются соотношениями:

$$M[\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]] = M[\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]] - M[\Theta[\Delta\lambda^*_j]] = ,$$

$$D[\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]] = M[\delta^2\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]] - M^2[\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]],$$

При $N >> 1$ $\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]$ распределена по нормальному закону, т. е.

$$\omega(\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]) = \frac{1}{(2\pi D[\delta\Theta^*])^{1/2}}\exp\left(-\frac{(\delta\Theta^* - M[\delta\Theta^*])^2}{2(D[\delta\Theta^*]}\right).$$

Полагая, что доминирующими факторами формирования ошибки выступают отличие действительного значения от истинного – $\delta_\partial\Theta^*$, и конечности объема выборки – $\delta_{кв}\Theta^*$ имеем (часто встречающийся на практике случай):

$$\delta\Theta^* = \delta_{\partial}\Theta^* + \delta_{кв}\Theta^* \to M[\delta\Theta^*] = M[\delta_{\partial}\Theta^*],$$
$$D[\delta\Theta^*] = D[g[\Delta^*\lambda^*_j]]/N = D[g[\Delta\lambda^*_j]]/N + D[g[\Delta_{\partial}\lambda^*_j]]/N .$$

Соответственно гауссово распределение приобретает следующий вид:

$$\omega(\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(D[\delta_{кв}\Theta^*] + D[\delta_{\partial}\Theta^*])}} \exp\left(-\frac{(\delta\Theta^* - M[\delta_{\partial}\Theta^*])^2}{2(D[\delta_{кв}\Theta^*] + D[\delta_{\partial}\Theta^*])}\right)$$

Если использование данного нормального распределения не обеспечивает требуемой достоверности, то возникает проблема существенного увеличения трудоемкости испытаний, т. к. идентификация $\omega(\delta\Theta^*)$ требует формирования соответствующих массивов $\{\delta\Theta^*{}_s\}_{s=1}^{S}$. При известном распределении $\omega(\delta\Theta^*)$ может быть определена вероятность принадлежности ошибки к установленному интервалу $[\delta_1, \delta_2]$.

$$P[\delta_{\partial}\Theta^* \in [\delta_1, \delta_2]] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\Phi[\frac{(\delta_1 + M[\delta_{\partial}\Theta^*])}{(D[\delta_{кв}\Theta^*] + D[\delta_{\partial}\Theta^*])}] - \Phi[\frac{(\delta_1 - M[\delta_{\partial}\Theta^*])}{(D[\delta_{кв}\Theta^*] + D[\delta_{\partial}\Theta^*])}]\right)$$

Если m_δ – *число модификаций характеристики достоверности оценивания* Θ, то для принятой конкретизации имеем m_δ *=3*.

Известная зависимость $P[\delta\Theta^* \in [\delta_1, \delta_2]] = f(N, \delta_{\partial}\Theta^*)$ лежит в основе выбора объема выборки N и метрологических характеристик эталона. Именно, N определяется как решение уравнения

$$N = \mathrm{rad}(P_{треб}[\delta\Theta^* \in [\delta_1, \delta_2]] = f(N, M[\delta_{\partial}\Theta^*], D[\delta_{\partial}\Theta^*])),$$

где $P_{треб}[\delta\Theta^* \in [\delta_1, \delta_2]]$ – требуемое значение $P_{треб}[\delta\Theta^* \in [\delta_1, \delta_2]]$, а пара $M[\delta_{\partial}\Theta^*], D[\delta_{\partial}\Theta^*]$ – как решение уравнения

$$M[\delta_{\partial}\Theta^*], D[\delta_{\partial}\Theta^*] = \mathrm{rad}(P_{треб}[\delta\Theta^* \in [\delta_1, \delta_2]] =$$
$$= f(N, M[\delta_{\partial}\Theta^*], D[\delta_{\partial}\Theta^*]))$$

Приведенные соотношения относятся к метрологическим испытаниям, цель которых является аттестация испытуемого измерительного средства. При этом $m = m_\lambda m_\Theta m_\delta = 72$.

Иной состав алгоритмического обеспечения требуется для метрологических испытаний, цель которых заключается верификация испытуемого средства. Достоверность результатов верификации обычно оценивается либо вероятностями ошибок первого или второго рода, либо вероятностью принадлежности оценки $\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]$ требуемому интервалу – $P[\Theta^*[\Delta\lambda^*_j] \in [\Theta_1, \Theta_2]]$. Решение о соответствии испытуемого средства требованиям [6] принимается в соответствии с правилом

$$\Theta^*[\Delta\lambda^*_j] \in \Theta_{\partial on} \to ИС_+ \vee \Theta^*[\Delta\lambda^*_j] \notin \Theta_{\partial on} \to ИС_-.$$

Здесь указываются следующие обозначения:

ИС+ – испытуемое средство, соответствующее требованиям.

ИС- – испытуемое средство, не соответствующее требованиям.

Конкретный вид данного правила определяется принятым критерием и допустимой областью $\Theta_{\partial on}$. Необходимые условные распределения плотностей вероятности $\omega(\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]/\Theta[\Delta\lambda^*_j])$, $\omega(\Theta[\Delta\lambda^*_j]/\Theta^*[\Delta\lambda^*_j])$ устанавливаются по следующей логике.

Поскольку ошибка определения является разностью вида $\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j] = \Theta^*[\Delta\lambda^*_j] - \Theta[\Delta\lambda^*_j]$, то установление $\omega(\delta\Theta^*[\Delta\lambda^*_j])$ позволяет определить искомые условные вероятности. Именно,

$$\omega(\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]/\Theta[\Delta\lambda^*_j]) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(D[\delta_{кв}\Theta^*] + D[\delta_{\partial}\Theta^*])}} \exp\left(-\frac{\Theta^* - M[\delta_{\partial}\Theta^*] - \Theta)^2}{2(D[\delta_{кв}\Theta^*] + D[\delta_{\partial}\Theta^*])}\right)$$

и $\omega(\Theta[\Delta\lambda^*_j]/\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(D[\delta_{кв}\Theta^*] + D[\delta_{\partial}\Theta^*])}} \exp\left(-\frac{(\Theta - M[\delta_{\partial}\Theta^*] - \Theta^*)^2}{2(D[\delta_{кв}\Theta^*] + D[\delta_{\partial}\Theta^*])}\right).$$

Данные распределения лежат в основе определения вероятностей ошибок первого и второго рода

$$P_I = 1 - \int_{\Delta_{tr}} \omega(\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]/\Theta[\Delta\lambda^*_j] \in \Theta_{доп}) d(\Theta^*[\Delta\lambda^*_j])$$

- вероятность ошибки первого рода;

$$P_{II} = \int_{\Delta_{tr}} \omega(\Theta^*[\Delta\lambda^*_j]/\Theta[\Delta\lambda^*_j] \notin \Theta_{доп}) d(\Theta^*[\Delta\lambda^*_j])$$

- вероятность ошибки второго рода.

Таким образом, представленное алгоритмическое обеспечение метрологических испытаний, включает в себя три алгоритма определения вероятностных характеристик погрешностей (оценивание математического ожидания и дисперсии погрешности, а также вероятности принадлежности погрешности установленному интервалу).

Три алгоритма определения вероятностных характеристик ошибок $\delta\Theta^*$ (оценивание математического ожидания и дисперсии ошибки, а также вероятности принадлежности ошибки установленному интервалу); три процедуры принятия решения о соответствии (не соответствии) испытуемого средства требованиям с использованием разных критериев

$$(P[\Theta^*[\Delta\lambda_j^*] \in [\Theta_1, \Theta_2]],\ P_I,\ P_{II}).$$

Данную совокупность можно дополнить алгоритмами безэталонных испытаний, позволяющих определять дисперсию погрешности, и алгоритмами сличений, используемыми для оценивания разброса систематических погрешностей сличаемых средств.

III. Заключение

Рассмотренный состав математического обеспечения относится к измерению величин с представлением результата действительным числом λ_j^*. Применительно к другим видам измерений (совместные измерения и др.) состав соответствующего математического обеспечения будет иным.

Изложенное относится к случаю, когда вид входного воздействия от испытания к испытанию не меняется. Если данное условие не выполняется, число возможных модификаций процедур испытаний соответствующим образом меняется.

Таким образом, различаются три основных вида математического обеспечения метрологических испытаний:

- обеспечение формирования оценок вероятностных характеристик погрешностей результатов измерений;
- математическое обеспечение формирования эталонного и тестового сигнала;
- математическое обеспечение оценивания достоверности результатов метрологических испытаний.

Список литературы

[1] Цветков Э.И. Метрологические испытания без применения эталонов // Мир измерений. 2016. № 4. С. 12-18.

[2] D. Larionov, N. Romantsova and R. Shalymov, Multiphysical System of Operational Monitoring of the Condition of the Railway Track //2019 4th International Conference on Intelligent Transportation Engineering (ICITE), 2019, pp. 59-63.

[3] P.G. Korolev, A.V. Utushkina, A.V. Tsareva and N.A. Kuzmina, Research of the measuring channel with automatic correction data conversion // 2016 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (EIConRusNW), 2016, pp. 418-421.

[4] Сулоева Е.С., Романцова Н.В. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. Т. 9. № 4 (35).

[5] Чернышова Т.И., Курносов Р.Ю. Оценка метрологической надежности процессорных измерительных средств: // Энергосбережение и эффективность в технических системах Материалы VIII Международной научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. 2021. С. 86-87.

[6] Сулоева Е.С., Цветков Э.И. Процедуры принятия решения по результатам бинарных и групповых сличений // Приборы. 2014. № 11 (173). С. 33-38.