

# Модификация фильтра Калмана с разделением невязки и локализацией

И. Р. Гогорев<sup>1</sup>, Г. В. Бельский<sup>2</sup>

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

<sup>1</sup>ilmirgogorev@yandex.ru, <sup>2</sup>gvbelskiy@etu.ru

**Аннотация.** Предложена модификация фильтра Калмана с разделением невязки и локализацией, позволяющая выработать оценку измеряемых и восстанавливаемых переменных, подверженных воздействию шумов, в условиях неточно известных интенсивностей шумов и параметрической неопределённости модели объекта. Приведены результаты математического моделирования, демонстрирующие преимущества предложенной модификации перед классическим подходом построения фильтра Калмана.

**Ключевые слова:** фильтр Калмана; параметрическая неопределённость; интенсивность шума

## I. Постановки задачи и обзор существующих работ

### A. Классический фильтр Калмана и его проблемы

Проектирование классического фильтра Калмана требует много априорно-заданных условий: модели объекта и измерений известны и линейны, плотности вероятности шумов измерений и погрешностей модели гауссовы, погрешности и шумы являются белым шумом, имеют нулевое математическое ожидание и некоррелированы между собой. Только при выполнении этих условий фильтр будет оптимальным, иначе – субоптимальным или вообще не оптимальным. Обычно реальные условия отличаются от предполагаемых или соответствуют им с определённой точностью.

### B. Обзор работ по модификации классического фильтра Калмана

Для многих ситуаций нарушения требований разработаны методы решения: В [1] представлены модификации Фильтра для случаев, когда параметры объекта зависят от времени, сигнал и шум коррелированы, шум цветной и др. В [2] перечисляются и сравниваются различные модификации фильтра Калмана для случая, когда модели объекта и измерений нелинейны. Одной из самых существенных проблем является работа фильтра в условиях неточно известной модели объекта и параметров шумов. При рассмотрении данных проблем обычно прибегают к методам адаптивной и робастной фильтрации.

Классической и самой простой модификацией фильтра Калмана для работы с неточно заданной или неизвестной моделью является многогипотезный фильтр Калмана. Смысл его заключается в том, что формируется множество фильтров Калмана, настроенных на разные предполагаемые модели объекта, а в процессе работы модифицированного фильтра оценкой процесса выбирается выход того простого фильтра Калмана, у которого ошибка наблюдения является наименьшей,

иначе оценка процесса формируется на основе выходов всех простых фильтров Калмана, например, взвешенно суммируется. Недостатком такой схемы является колоссальный рост порядка замкнутой системы – каждый фильтр Калмана включает модель объекта, то есть имеет такой же порядок, к тому же чем шире диапазон неопределённости параметров объекта, тем больше фильтров Калмана необходимо. В работе [3] представлен обзор работ по использованию фильтра Калмана в условиях неточно известных характеристик модели объекта и характеристик шумов. Представленные в обзоре работы являются интересными, но проблемой многих является сложность как для ручного расчёта и восприятия, так и для переключивания процессов синтеза на программные средства.

В работе [4] предложен более простой подход повышения робастности фильтра Калмана, основанный на предположении о низкочастотном характере ошибки наблюдения, вызванной неопределённостью модели объекта, и высокочастотном характере шумов, и использовании специального фильтра для их разделения.

## II. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ФИЛЬТР РАЗДЕЛЕНИЯ НЕВЯЗКИ И МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ

Как уже было отмечено, в работе [4] предложен метод, который позволяет улучшить робастность фильтра Калмана, используя небольшую его модификацию. В указанной работе модификация фильтра предлагается управления МПО – морским подвижным объектом, но используемая математическая модель может быть распространена на более широкий класс объектов управления. Опишем далее предлагаемую модификацию.

Предполагается, что объект имеет математическую модель вида:

$$\dot{x} = F_m(x, a, t) + G(u) + F(t) + w, \quad (1)$$

где  $F_m(x, a, t)$  – вектор функция правых частей уравнений динамики объекта,  $G(u)$  – вектор управляющих воздействий,  $F(t) + w$  – вектор внешних возмущений, состоящий из детерминированного воздействия и случайных шумов.

Для формирования фильтра при этом используется модель:

$$\dot{x} = Ax + G(u) + F(x, a, t) + w, \quad (2)$$

где  $F(x, a, t) = F_m(x, a, t) + F(t) - Ax$  – возмущения, представляющие совокупность внешнего детерминированного воздействия  $F(t)$  и

неопределённость модели объекта  $F_m(x, a, t) - Ax$ , которые принимаются за внешнее возмущение.

Модель измерений предполагается такой, как в классическом фильтре Калмана, – линейной, с аддитивным вхождением шумов измерений  $\xi$ :

$$y = Cx + \xi$$

Алгоритм фильтрации представляет собой классический фильтр Калмана с добавлением предварительного фильтра, где за модель объекта берутся уравнения (2). Модель модифицированного фильтра Калмана можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + G(u) + K_0(v - v_n) + \hat{F} \\ \dot{v}_n &= (v - v_n)/T, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\hat{F}$  – оценка неизвестных внешних возмущений, определяемое как  $\hat{F} = K_1 v_n$ ,  $v = y - C\hat{x}$  – невязка наблюдения,  $(v - v_n)$  – высокочастотная и  $v_n$  – низкочастотная составляющие невязки, которые формируются с помощью дополнительного предварительного фильтра, который в указанной работе представляет собой простое апериодическое звено. Коэффициенты  $K_0$  при высокочастотной составляющей формируются аналогично как в классическом фильтре Калмана. Коэффициенты  $K_1$  при низкочастотной составляющей невязки предлагается искать эмпирически и помощью моделирования.

Основная идея заключается в том, что внешние детерминированные возмущения, в которые входят ошибка, вызванная отличием используемой и реальной модели объекта, является низкочастотной, а шумы – высокочастотной, вследствие чего мы можем их разделить с помощью дополнительного фильтра и формировать составляющие оценки на их основе по отдельности. Поэтому метод и несёт название «Фильтрация с разделением невязки» [4].

Первой модификацией описанного метода, предлагаемой автором данной работы, является использование более сложного предварительного фильтра, например, использование фильтра второго порядка. Это ведёт к увеличению параметров системы, которые необходимо настраивать, но позволяет получить больше информации из доступных измерению процессов, которую потом можно использовать. Фильтр описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\mu^2 \ddot{\hat{y}} + 2d\mu \dot{\hat{y}} + \hat{y} = y, \quad (4)$$

где  $y$  – вход фильтра,  $\hat{y}$  – оценка  $y$ , которая является выходом фильтра,  $\mu$  – малый параметр, отражающий инерционность фильтра,  $d$  – параметр демпфирования.

Уравнения (4) также могут быть описаны передаточной функцией:

$$W_\phi = \frac{1}{\mu^2 p^2 + 2d\mu p + 1}$$

Данный фильтр позволяет не только более точно настроить разделение по частотам, но и также получать оценку не только самой невязки, но и её производной.

Другая идея модификации метода заключается в использовании алгоритма, когда по высокочастотной составляющей невязки идёт коррекция динамики наблюдателя аналогично, как в методе разделения невязок, описанном выше, а по низкочастотной составляющей формировать более сложный алгоритм коррекции, нежели просто пропорциональное. Так как оценка внешних возмущений нам не нужна и так как мы можем получать информацию о производной невязки, то изначально предполагалось использовать скользящее управление, подобно тому, как это делается в наблюдателях на скользящих режимах [5] или в более общем алгоритме сигнальной адаптации наблюдателя [6], с той разницей, что в классической схеме поверхность скольжения формируется в виде:

$$S = \varepsilon = 0,$$

где  $\varepsilon$  – ошибка наблюдения. А для данной работы предполагается использовать поверхность скольжения:

$$S = \dot{\varepsilon} + k\varepsilon = 0, k > 0 \quad (5)$$

Но алгоритм коррекции всё также:

$$u = -h \cdot \text{sgn}(S), h > 0 \quad (6)$$

Разница в том, что в классических схемах предполагается, что наблюдатель максимально быстро стремится к состоянию, при котором ошибка наблюдения равна нулю, а в схеме с поверхностью (5) предполагается, что ошибка наблюдения должна вести себя подобно затухающей экспоненте.

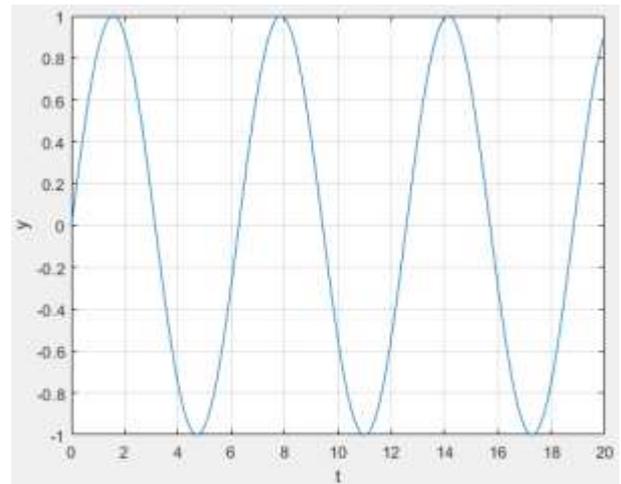


Рис. 1. Выход линейного объекта

Также изначально предполагалось, что использование скользящего режима даёт не только высокую скорость отработки, но и в данной схеме лишено недостатка, свойственного для скользящих режимов, – дребезга в районе поверхности скольжения, предполагалось, что так как дребезг имеет высокочастотный характер, он будет отфильтровываться вместе с шумами.

Дальнейшие пояснения для демонстрации будут поясняться с использованием применения данной схемы на простом объекте управления, описываемом линейными уравнениями второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0]$$

Реакция данного объекта без воздействия шумов на единичное ступенчатое воздействие имеет вид, представленный на рис. 1.

Теперь рассмотрим работу данного объекта при воздействии шумов, с помощью которых моделируем погрешности модели и шум измерений. Модель объекта будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + \xi \end{aligned}$$

Выберем белые шумы с мощностью 0.1. Выход нашего объекта при воздействии шумов станет иметь вид, представленный на рис. 2.

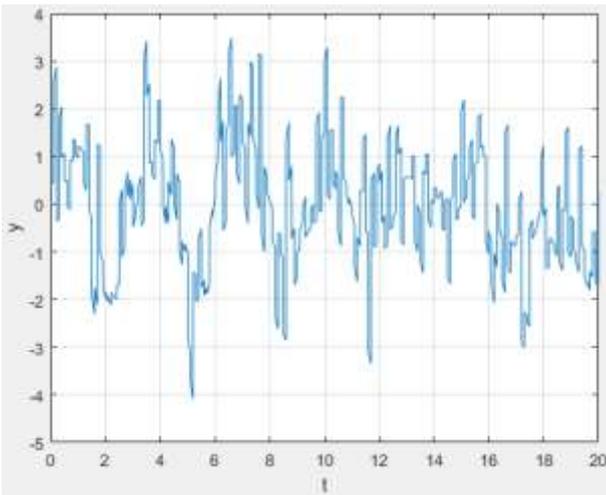


Рис. 2. Выход зашумлённого линейного объекта

Из рисунка видно, что в зашумлённом объекте сложно разглядеть простую синусоиду, а также при увеличенном времени моделирования можно сделать вывод, что объект становится неустойчивым.

Спроектируем для нашего объекта классический фильтр Калмана. Используем дискретный фильтр Калмана, так как чаще всего на практике приходится фильтровать процессы, порождаемые объектом с непрерывной динамикой, с помощью дискретных средств, реализуемых на цифровых устройствах. Матрицы интенсивности шумов зададим произвольными:  $Q=1, R=12$ . Воспользуемся стандартной функцией пакета Matlab «kalmd». Время дискретизации 0.002 с. Полученные коэффициенты усиления для наблюдателя имеют значения:

$$K = \begin{bmatrix} 0.5772 \\ -0.0012 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

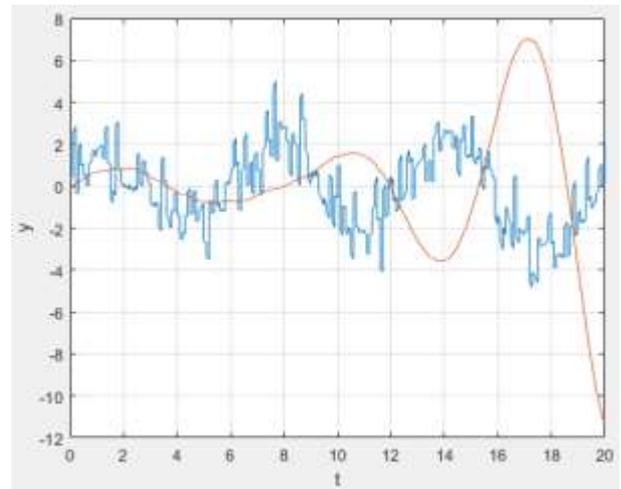


Рис. 3. Выход зашумлённого линейного объекта и фильтра Калмана

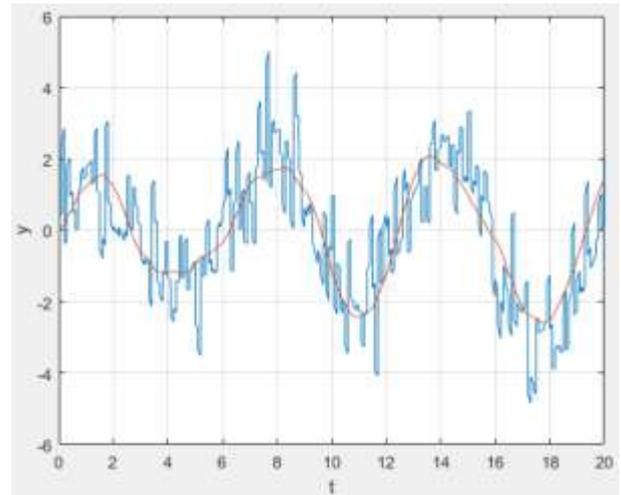


Рис. 4. Моделирование с модифицированным фильтром Калмана

Результаты моделирования с использованием классического фильтра Калмана приведены на рис. 3. Как видно, если поначалу фильтр справляется, то потом начинает расходиться ещё быстрее. Промоделируем систему с предложенной модификацией. Результаты моделирования представлены на рис. 4. Как можно видеть, модификация фильтра справляется достаточно хорошо. Предварительный фильтр также был дискретизирован путём замены интегратора на звено задержки, охваченное положительной обратной связью. Параметры предварительного фильтра были выбраны:  $\mu=0.1, d=5$ . Коэффициент усиления сигнала коррекции (6) была взята  $h = 0.0005$  – специально того же порядка, что и коэффициенты фильтра Калмана, чтобы уменьшить влияние дребезга вокруг поверхности скольжения.

Пусть теперь реальные параметры объекта отличаются от предполагаемых в два раза. То есть  $A^* = 2 \cdot A$ , промоделируем систему с новыми параметрами объекта, но параметры фильтра менять не будем. Результаты моделирования представлены на рис. 5. Как видно, фильтр перестаёт справляться, в какие-то моменты он даже движется в противофазе с объектом. В результате было принято решение отказаться от разрывного управления и релейный элемент заменить на

простой коэффициент. То есть сигнал коррекции всё также формируется на основе отклонения от поверхности скольжения, но теперь пропорционален этому отклонению. Благодаря этому наблюдатель всё также будет пытаться свести невязку наблюдения к поверхности, но делать это медленнее и в результате меньше реагировать на возмущения с быстрой динамикой, которые предположительно и стали причиной плохой работы модифицированного фильтра. Данный метод носит названия «метод локализации» [7]. Вид сигнала коррекции в таком случае:

$$u = K \cdot (F_x - \dot{y}),$$

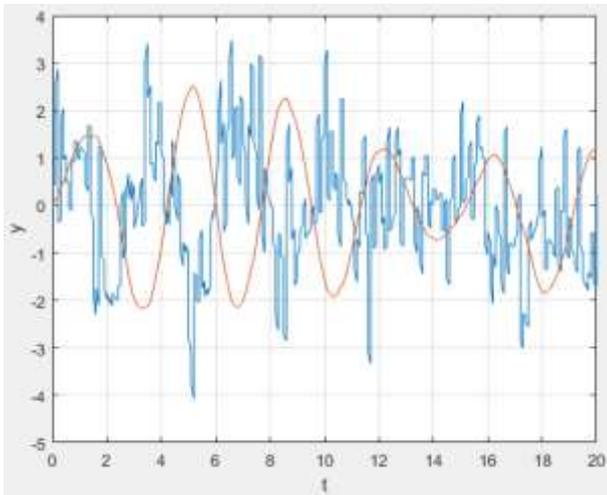


Рис. 5. Модель с изменёнными параметрами объекта

где  $F_x$  – вектор функция желаемых правых частей. В [7] метод локализации описывается как метод управления, но задачи управлению и наблюдения дуальны и поэтому многие методы управления могут быть применены как методы наблюдения путём замены ошибки управления на ошибку наблюдения. В качестве коэффициентов усиления для метода локализации были выбраны коэффициенты фильтра Калмана. Промоделируем систему с использованием метода локализации с обычными и с изменёнными параметрами объекта. Результаты представлены на рис. 6 и 7. Как видно по результатам, с обычной динамикой объекта метод также хорошо справляется, что и при использовании скользящего режима, но при работе с изменёнными параметрами отставание по фазе у фильтра с методом локализации гораздо меньше.

В итоге структура системы с модифицированным фильтром Калмана будет иметь вид, представленный на рис. 8. Подсистема «Add\_filter», включает в себя дополнительный фильтр.

### III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена модификация классического фильтра Калмана с использованием методом разделения невязок и метода локализации. На примере простой системы было показано, что с помощью данной модификации можно работать с объектами, в динамике которых есть неопределённость, при воздействии шумов, параметры которых нам также до конца неизвестны. Также преимуществами данной системы является простота в проектировании и то, что отсутствует

необходимость модифицировать сам фильтр Калмана, так как все модификации по сути являются некоторыми дополнительными подсистемами к основному фильтру, что означает, что данную схему можно применять совместно не только с классическим фильтром Калмана, но и с различными его модификациями, часть которых была перечислена в начале.

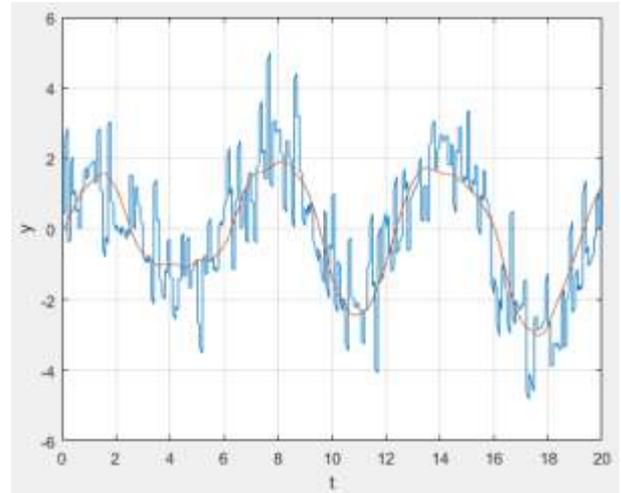


Рис. 6. Модель с использованием метода локализации

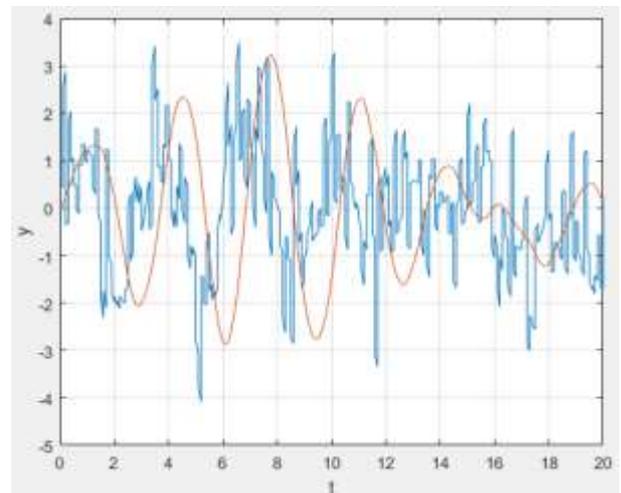


Рис. 7. Модель с методом локализации и изменённым объектом

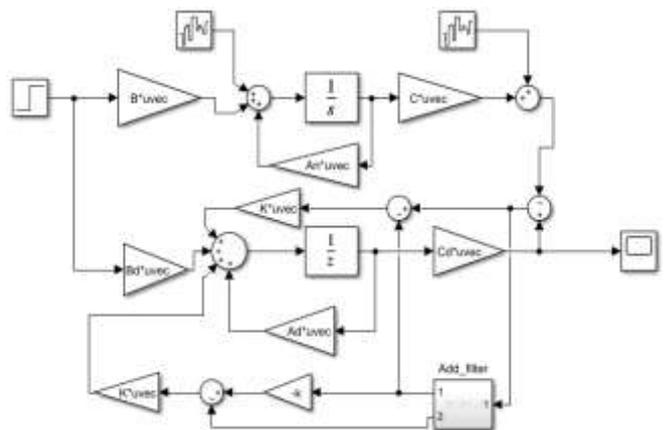


Рис. 8. Структурная схема системы с модифицированным фильтром

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. С. 120-162.
- [2] Куликова М.В., Куликов Г.Ю. Численные методы нелинейной фильтрации для обработки сигналов и измерений. // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, вып. 4. С. 64-98.
- [3] Трошина Г.В. Об использовании фильтра Калмана при идентификации динамических систем. // Сборник научных трудов НГТУ. 2014. вып. 3(77). С. 37-52.
- [4] Данилова С.К., Кусков А.М., Кусков И.М., Тарасов Н.Н. Адаптивное управление МПО в условиях действия возмущений. // Известия ЮФУ. Технические науки. 2017. вып. 2(187). С. 221-234.
- [5] Рывкин С.Е. Скользящие режимы в задачах управления автоматизированным синхронным электроприводом. М.: Наука, 2009. С. 58-65.
- [6] Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербург, отд-ние, 1992. С. 219-221.
- [7] Востриков А.С., Французова Г.А. Теория атоматического управления: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. С. 283-291.