Аналитическое решение для повышающего преобразователя постоянного напряжения и сравнение аналитического решения с моделями MATLAB и ngspice

М. Аднан[1], Б. С. Барнабас[2],
Н. Коирала[3], А. Н. Прокшин[4]
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
[1]madnan@stud.etu.ru, [2]barnabassimon486@gmail.com,
[3]nkoirala@stud.etu.ru, [4]anprokshin@etu.ru

Г. А. Карпов
Университет ИТМО
sorl124@yandex.ru

П. Нироула
Лундский университет
pr8423ni-s@student.lu.se

***Аннотация*. Представлены аналитические, т.е. точные, решения уравнений для повышающего преобразователя без обратной связи. Эти решения позволяют прогнозировать реакцию системы на начальные условия. Получены выражения для периода колебаний и декремента затухания. Проведено сравнение аналитических решений для повышающего преобразователя без обратной связи с результатами моделирования в программах MATLAB и ngspice.**

Ключевые слова: повышающий преобразователь постоянного напряжения, аналитическое решение, период колебаний, коэффициент затухания, моделирование ngspice

I. Введение

Рассматриваем повышающий преобразователь постоянного напряжения в схеме, приведенной на рис. 1, и приведем аналитическое решение в режиме непрерывного тока через дроссель. Решены дифференциальные уравнения для тока **i** через дроссель L и напряжения на нагрузке R и конденсаторе C с начальными условиями для двух стадий: первая – когда ключ S разомкнут и вторая – когда ключ S замкнут.

Стадии повторяются с периодом T. Протяженность первой стадии γT, второй – $(1-\gamma)T$. Из дифференциальных уравнений получены зависимости для значений токов и напряжений в момент времени $n\,T$ от предыдущего момента времени $(n\text{-}1)\,T$. Полученное разностное уравнение для дискретной функции решено аналитически с помощью дискретного преобразования Лапласа.

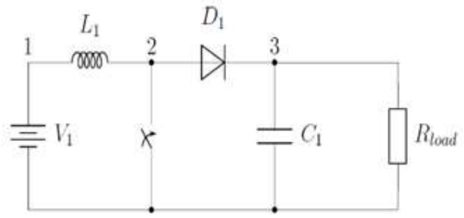

Рис. 1. Схема повышающего преобразователя постоянного напряжения

II. Метод дискретного преобразования Лапласа для повышающего преобразователя

Стадия 1: Когда ключ S открыт, схема повышающего преобразователя выглядит, как показано на рис. 2.

Имеем,

$$U_1 = L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri_1$$

Здесь, R – сопротивление нагрузки; L – индуктивность дросселя; C – емкость фильтра; t – мгновенное время; i – ток через дроссель; i_1 – ток через нагрузку; i_2 – ток через конденсатор.

Начальные условия в момент t=0

$$i_1(0) = i_{10}$$

$$i_2(0) = i_{20}$$

Неоднородная часть уравнения принимается равной константе:

$$u = const$$

Для упрощения выражений введем α и ω:

$$\alpha=\frac{1}{2RC} \qquad \omega=\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

Вычтя постоянную часть, вводим переменные:

$$\tilde{\imath}_1(t) = i_1(t) - \frac{U}{R}, \tilde{\imath}(t) = i(t) - \frac{U}{R}$$

Решения уравнений для стадии 1 получаем в виде:

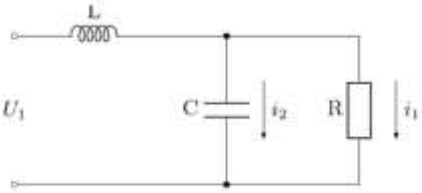

Рис. 2. Схема повышающего преобразователя при открытом ключе S

Стадия 2: Когда ключ S замкнут, диод D разделяет исходную схему на две части и схема выглядит как на рис. 3. Для левой части схемы уравнения для интервала (n+γ)T≤t≤(n+1)T, *где n= номер последовательного интервала, γ = 1-D где D скважность*, T= *период ШИМ:*

$$\mathrm{RC}\frac{\mathrm{dU_C}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{U_C} = 0$$

Решение этого уравнения в непрерывном времени:

$$i_1(t) = i_1(n+\gamma)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

В дискретные моменты имеем решение:

$$i_1(n+1) = i_1(n+\gamma)e^{-\frac{1}{RC}(1-\gamma)\cdot T}$$

Для правой части схемы на рис. 3, имеем уравнения:

$$U = L\frac{di}{dt}$$

Решения этого уравнения:

$$\mathrm{i(t) = i(n+}\gamma) + \frac{U}{L}\cdot t$$

Зависимость значений токов в момент времени $n\,T$ от предыдущего момента времени $(n\text{-}1)\,T$ приведена ниже:

$$\bar{\imath}[n+1] = \frac{U}{L}.(1-\gamma)T + \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega}\Big[\bar{\imath}_1[n]\Big(\omega\cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2-\omega^2}{2\alpha}\sin(\omega\gamma T)\Big) + i_2[n](\omega\cos(\omega\gamma T) + \alpha\sin(\omega\gamma T))\Big] = \frac{U}{L}.(1-\gamma)T + \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega}[\bar{\imath_1}[n]\Big(\omega\cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha^2-\omega^2}{2\alpha}\sin(\omega\gamma T)\Big) + (\bar{\bar{\imath}}[n] - \bar{\imath_1}[n])(\omega\cos(\omega\gamma T) + \alpha\sin(\omega\gamma T))]$$

$$\bar{\imath_1}[n+1] + \frac{U}{R} = (\frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega}[\bar{\imath_1}[n](\omega\cos(\omega\gamma T) + \alpha\sin(\omega\gamma T)) + i_2[n]2\alpha\sin(\omega\gamma T)] + \frac{U}{R})e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}} = \frac{e^{-\alpha\gamma T-\frac{(1-\gamma)T}{RC}}}{\omega}[\bar{\imath_1}[n](\omega\cos(\omega\gamma T) + \alpha\sin(\omega\gamma T)) + (\bar{\bar{\imath}}[n] - \bar{\imath_1}[n])(2\alpha\sin(\omega\gamma T)) + \frac{U}{R}e^{-\frac{(1-\gamma)T}{RC}}$$

Имея зависимости для дискретных моментов времени используем дискретное преобразование Лапласа D{f(n)}.

По теореме сдвига

$$D\{i[n+1]\} = e^q I*(q) - e^q i[0]$$

$$D\{i_1[n+1]\} = e^q I_1*(q) - e^q i_1[0]$$

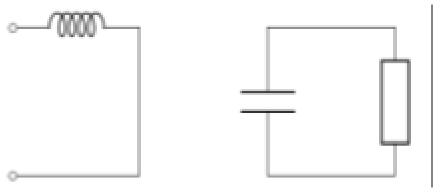

Рис. 3. Схема повышающего преобразователя при замкнутом ключе S

В области изображений q после прямого дискретного преобразования Лапласа получаем алгебраические уравнения:

$$e^q I*(q) - e^q i[0] - \frac{U}{L}.(1-\gamma)T\frac{e^q}{e^q-1} = \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega}\Big[-\tilde{I}_1^*(q)\frac{\alpha^2+\omega^2}{2\alpha}\sin(\omega\gamma T) + I^*(q)(\omega\cos(\omega\gamma T) + \alpha\sin(\omega\gamma T))\Big]$$

$$e^q\tilde{I}_1^*(q) - e^q i_1[0] + \frac{U}{R}\Big(1 - e^{\frac{-(1-\gamma)T}{RC}}\Big)\frac{e^q}{e^q-1} = \frac{e^{-\alpha\gamma T-\frac{(1-\gamma)T}{RC}}}{\omega}\Big(\tilde{I}_1^*(q)(\omega\cos(\omega\gamma T) + \alpha\sin(\omega\gamma T)) + \Big(I^*(q) - \tilde{I}_1^*(q)\Big).2\alpha\sin(\omega\gamma T)\Big)$$

Переведя уравнения в матричную форму

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I^*(q) \\ \tilde{I}_1^*(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad (1)$$

где,

$$\mathrm{A} = \frac{e^{-\alpha\omega T}}{\omega}(\omega\cos(\omega\gamma T) + \alpha\sin(\omega\gamma T)) - e^q$$

$$\mathrm{B} = \frac{e^{-\alpha\gamma T}}{\omega}\frac{\alpha^2+\omega^2}{2\alpha}\sin(\omega\gamma T)$$

$$\mathrm{C} = 2\alpha\frac{e^{-\alpha(2-\gamma)T}}{\omega}\sin(\omega\gamma T)$$

$$\mathrm{D} = \frac{e^{-\alpha(2-\gamma)T}}{\omega}(\omega\cos(\omega\gamma T) - \alpha\sin(\omega\gamma T)) - e^q$$

$$\mathrm{X} = -e^q i[0] - \frac{U}{R}(\frac{\alpha^2+\omega^2}{2\alpha})(1-\gamma)T\frac{e^q}{e^q-1}$$

$$\mathrm{Y} = -e^q i_1[0] + \frac{U}{R}(1 - e^{\frac{-(1-\gamma)T}{RC}})\frac{e^q}{e^q-1}$$

В пределе, когда n равно бесконечности

$$\lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{n\to\infty}(e^q - 1)F^*(q)$$

Решение для тока *i(t)*:

$$2\alpha LR\cdot(e^{\alpha\gamma T}\omega - \cos(\gamma\omega T)\omega(e^{2\alpha\gamma T} + e^{2\alpha T}) + \sin(\gamma\omega T)(e^{2\alpha\gamma T} - e^{2\alpha T})\alpha) \;/\; 2e^{2\alpha\gamma T}\cos(\gamma\omega T)\alpha\omega RT(\gamma-1) + e^{2\alpha\gamma T}\alpha^2\,\mathrm{RT}(1\text{-}\,\gamma)\sin(\gamma\omega T) - e^{2\alpha\gamma T}\sin(\gamma\omega T)L(\alpha^2+\omega^2) + 2e^{\alpha\gamma T+2\alpha T}\alpha R\omega T(1-\gamma) + e^{2\alpha T}\sin(\gamma\omega T)L(\alpha^2+\omega^2)$$

Ток в нагрузке I_R:

$$I_R = \frac{U}{R} + \frac{U}{RL}(-e^{2\alpha\omega T}\cos(\gamma\omega T)L\omega + e^{2\alpha T}\cos(\gamma\omega T)L\omega + e^{3\alpha\gamma T}L\omega - 2e^{2\alpha\gamma T}\sin(\gamma\omega T)\alpha\gamma RT - e^{2\alpha\gamma T}\sin(\gamma\omega T)\alpha L + 2e^{2\alpha\gamma T}\sin(\gamma\omega T)\alpha RT - e^{\alpha\gamma T+2\alpha T}L\omega + e^{2\alpha T}\sin(\gamma\omega T)\alpha L)/(\omega e^{\alpha\gamma T} - \omega\cos(\gamma\omega T)(e^{2\alpha\gamma T} + e^{2\alpha T}) + e^{2\alpha\gamma T}\alpha\sin\gamma\omega T + \omega e^{\alpha\gamma T+2\alpha T})$$

На рис. 4 представлен случай, когда флуктуации выходного напряжения и флуктуации тока через дроссель находятся в пределах $\underline{+}\,5$ %.

Коэффициент затухания α и период флуктуаций $\tilde{T}$:

$[A_1 \times e^{2q} + A_2 \times e^{q}]$ /
$[e^{2q} - 2e^{q} \cdot e^{-\alpha T} \cdot$
$\operatorname{csch}(\alpha(1-\gamma)T)\cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha}{\omega}\sinh(\alpha(1-$
$\gamma)T)\sin(\omega\gamma T) + e^{-2\alpha T}$

Из A_1 и A_2 может быть определена фаза сигнала, которая не найдена в данной работе.

После обратного преобразования Лапласа (1) получаем коэффициент затухания $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha} = -\alpha T$$

Период осцилляций получаем в виде:

$$\tilde{\omega}n = \arccos[\operatorname{csch}(\alpha(1-\gamma)T)\cos(\omega\gamma T) + \frac{\alpha}{\omega}\sinh(\alpha(1-\gamma)T)\sin(\omega\gamma T) + e^{-2\alpha T}]$$

Период определяется из формулы $\frac{2\pi}{\tilde{\omega}n}$.

III. Моделирование в NGSPICE

Модель ngspice приведена ниже:

```
boost converter
V1 1 0 85
L1 1 2 0.102
D1 2 3 dmod
C1 3 0 0.75uF
R1 3 0 1157.76
SW 2 0 ns1 0 swm
VS1 ns1 0 pwl(0 0 .1m 0 .1m 1 .2m 1 .2m 0)r=0
.model dmod D
.model swm sw(roff=100000 ron=.00001 vt=.5 vh=.001)
.control
set color0 = white
tran .001m 14m
plot V(3), L1#branch
.endc
.end
```

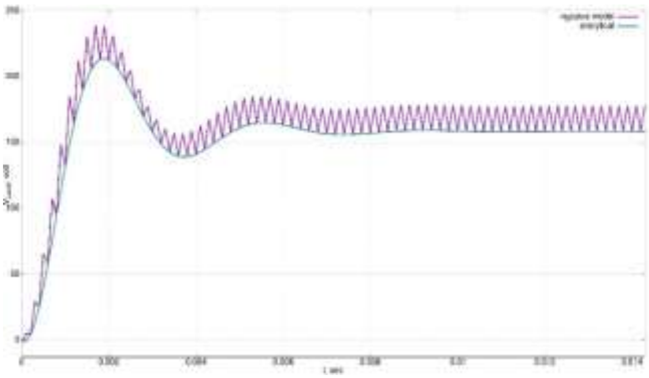

Рис. 4. Выходное напряжение V_{load} в модели ngspice

IV. Моделирование в MATLAB

MATLAB модель для повышающего преобразователя постоянного напряжения приведена на рис. 5.

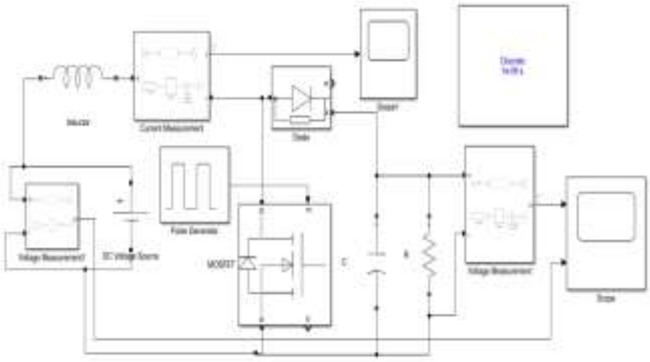

Рис. 5. MATLAB-модель для повышающего преобразователя

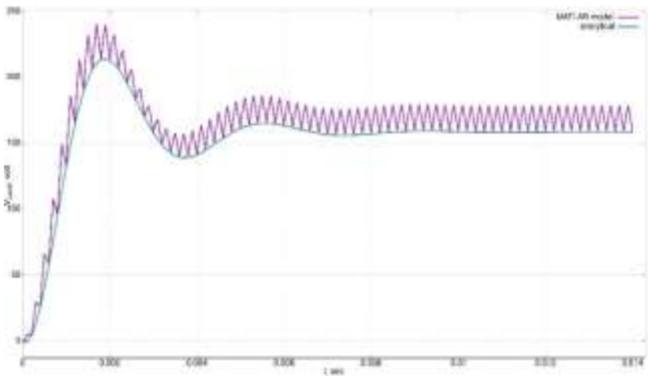

Рис. 6. Напряжение V_{load} в MATLAB-модели

V. Сравнение аналитического решения с результатами моделирования NGSPICE и MATLAB

Мы получили достаточно точное совпадение (в пределах 1 %) аналитического решения для токов и результатами моделирования в ngspice и MATLAB, отметим что моделирование в MATLAB дает решение на 1–2 вольта выше чем аналитическое решение и модель в ngspice.

ТАБЛИЦА I Сравнение моделей NGSPICE и MATLAB

Параметр	**ngspice**	**MATLAB**
Выходное напряжение, Vo	168 V	169 V
Амплитуда пульсаций выходного напряжения Vo	18 V	19 V
Ток дросселя	0.29 V	0.29 V
Амплитуда пульсаций тока дросселя	0.08 V	0.08 V
Амплитуда выходного напряжения	210 V	210 V
Амплитуда тока дросселяе	0.455 A	0.335 A

VI. Заключение

Внедрение приведенного в работе решения для повышающего преобразователя постоянного напряжения позволяет использовать в системах управления недорогих микроконтроллеров, имея в то же время достаточную точность. Сравнение моделей дает уверенность, что программа с открытым исходным кодом дает абсолютно такой же результат что и MATLAB при нулевой стоимости программы ngspice.

Список литературы

[1] Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем, М., ГИФМЛ, 1963.

[2] Slobodan Cuk,. D. Middlebrook, Advances in Switched-Mode Power Conversion, IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. IE-30, NO. 1, FEBRUARY 1983.

[3] Boris Axelrod, Yefim Berkovich, and Adrian Ioinovici, A new dynamic discrete model of DC-DC PWM converters // HAIT Journal of Science and Engineering B, Volume 2, Issues 3-4, pp. 426-451

[4] Rajesh Kumar Reddy,S. Giri Kumar, K. Sandeep, N. Arun, LMI Control of Conventional Boost Converter // Indian Journal of Science and Technology, Feb 2015.