

# Конфигурации квантовых цепей для модуля перестановок сопряженных коэффициентов при выполнении КПФ

В. А. Калмычков<sup>1</sup>, А. С. Кукаев<sup>2</sup>, И. В. Матвеева<sup>3</sup>

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

<sup>1</sup>vakalmychkov@etu.ru, <sup>2</sup>askukaev@etu.ru, <sup>3</sup>ir\_mat@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрен модуль перестановки сопряженных коэффициентов для унификации квантового преобразования Фурье. Представлена схема адаптации квантовой цепи от логического уровня расстановки многокубитовых квантовых преобразователей к физическому уровню представления на основе набора базовых преобразователей. Приведен пример автоматически сгенерированной спецификации квантовой цепи в виде программного кода на языке OpenQASM.

**Ключевые слова:** квантовое преобразование Фурье (КПФ); кубиты; квантовые преобразователи; квантовая цепь

## I. ВВЕДЕНИЕ

Теоретические основы квантовых вычислений были оформлены более 20 лет назад. А. Баренко с соавторами [1] и М. Нильсен с И. Чуангом [2] представили общее описание квантового алгоритма. Были введены понятие кубита и наборы базовых квантовых преобразователей, предложены варианты трансформации квантового алгоритма, ориентированные на предполагаемые вариации при физическом воплощении квантовых компьютеров. Квантовый алгоритм (программа) оформляется как спецификация квантовой цепи [1] путем расстановки квантовых преобразователей, изменяющих состояния кубитов. Визуализация квантовой цепи выполняется на основе графической нотации Дойча [1].

Сразу начались исследования в отношении выбора физической среды для устойчиво функционирующего квантового компьютера. Исследования квантовых устройств проводились на основе различных физических принципов: ядерный магнитный резонанс [3], ионные ловушки [4], фотоны [5], системы квантовых точек и сверхпроводимость [6].

После 2016 года результаты экспериментов из исследовательских лабораторий достаточно быстро вышли на широкий прикладной уровень. Многие производители в области компьютерных технологий (D-Wave [7], Google [8], IBM [9], Intel, Microsoft и др.) подготовили технологическую базу для наращивания характеристик квантового компьютера (пока есть существенные ограничения в их емкости – десятки и сотни кубитов, присутствуют существенные погрешности в процессе вычислений). Некоторые из них предоставили возможность массового удаленного доступа к таким квантовым устройствам посредством облачных сервисов или на фирменных сайтах.

## II. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И СРЕДСТВА ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ КВАНТОВЫХ АЛГОРИТМОВ

Аппаратная часть квантовых устройств активно развивается, необходима адаптация квантовых алгоритмов (программ) с учетом особенностей выполнения квантовых операций. Важно их оформление с учетом используемых ограниченных наборов квантовых преобразователей и числа обрабатываемых кубитов, а также выполнения операций на уровне близкого соседства [10]. Появилась потребность в средствах автоматизированного проектирования квантовых цепей [11].

Нами исследуется возможность автоматической генерации спецификаций квантовых цепей, имеющих модульную структуру с типовыми комбинациями преобразователей. Ранее нами был предложен вариант проектирования рекурсивной схемы [12] модуля перестановки сопряженных коэффициентов (МПСК) для КПФ [1]. Основная цель – оформление унифицированного квантового модуля с единой схемой прямого и обратного квантовых преобразований Фурье (ПКПФ и ОКПФ), применяемых в базовых квантовых алгоритмах, например, П. Шора [13] для решения задачи факторизации.

Мы ориентируемся на преобразователи из семейства  $C^k$ NOT (класс k-кубитовых преобразователей) и обмена двух кубитов SWAP.  $C^k$ NOT реализует функцию  $(x_1, \dots, x_k, y) \rightarrow (x_1, \dots, x_k, y \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k)$  и инвертирует целевой кубит, если все управляющие кубиты имеют значение  $|0\rangle$  или  $|1\rangle$  (вектора  $\mathbf{0}$  или  $\mathbf{1}$ ) по типу управления. Технологический облачный сервис IBM Quantum [9], обеспечивающий интерфейс для разработанных в IBM квантовых компьютеров, ориентирован на набор одно- и двухкубитовых квантовых преобразователей физического уровня, но позволяет проектировать графическую нотацию квантовой цепи на логическом уровне с использованием одно-, двух- и трехкубитовых квантовых преобразователей, обеспечивает верификацию квантовых цепей и выполнение квантовых алгоритмов на симуляторах и квантовых компьютерах (доступны варианты до 127 кубитов, свободный доступ ограничен 5 кубитами). При автоматизированном проектировании квантовых цепей нами используются квантовые преобразователи NOT ( $C^0$ NOT), управляемый одним кубитом CNOT ( $C^1$ NOT) и преобразователь Тоффоли – управляемый двумя кубитами CCNOT ( $C^2$ NOT).

Платформа IBM Quantum поддерживает открытый квантовый язык ассемблера OpenQASM [14] как инструмент для записи квантового алгоритма (расстановка квантовых преобразователей оформляется в виде последовательности команд). Используемые в нашем исследовании квантовые преобразователи представлены в OpenQASM следующими командами: NOT – x, CNOT – cx, CCNOT – ccx, обмена – swap, Адамара – h, управляемого поворота на заданный угол – cu1.

### III. РЕЗУЛЬТАТЫ НАШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В привычном варианте с двумя разными квантовыми цепями для ПКПФ и ОКПФ [13] мы предлагаем заменить ОКПФ на перестановку комплексно-сопряженных коэффициентов и последующим выполнением ПКПФ. Для этого нами используется унифицированная схема реализации КПФ на основе предлагаемого квантового алгоритма МПСК.

В итоге вместо двух схем для ПКПФ и ОКПФ можно использовать унифицированную схему (рис. 1, слева) – управляемое UniF (КПФ как сочетание модулей МПСК-W и ПКПФ-U<sub>F</sub>). Квантовая цепь для проверки воспроизведения входных значений на выходе схемы U<sub>F</sub>-W-U<sub>F</sub> представлена на рис. 1 справа.

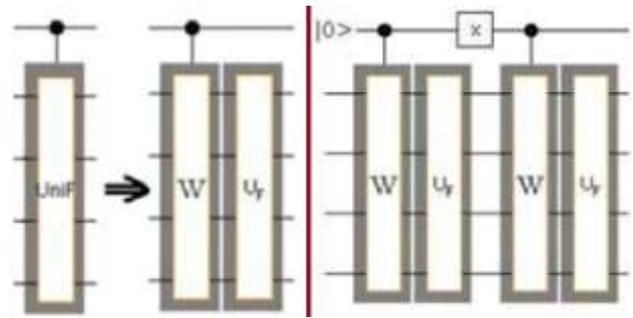


Рис. 1. Унифицированная схема на основе МПСК (обозначен W)

$$W_{i,N} = \begin{cases} W_3 = \text{CNOT}_{(2) \rightarrow 3} \text{CNOT}_{(1,2) \rightarrow 3} \text{CNOT}_{(1) \rightarrow 2} \text{CNOT}_{(1) \rightarrow 3}, & \text{если } i = 3 \\ \text{NOT}_{(1..N-1)} \text{CNOT}_{(1..N-1) \rightarrow N} \text{NOT}_{(1..N)} W'_{i,N-1}, & \text{если } N = 4 \\ \text{CNOT}_{(1..N-1) \rightarrow N} \text{NOT}_{(N-1, N-2)} \text{NOT}_{(1,2)} W'_{i,N-1}, & \text{если } i = 4 \\ \text{CNOT}_{(1..N-1) \rightarrow N} \text{NOT}_{(N-1, N-2)} W'_{i,N-1}, & \text{если } i > 4 \text{ и } i < N \\ \text{NOT}_{(1..N-1)} \text{CNOT}_{(1..N-1) \rightarrow N} \text{NOT}_{(N-1, N-2)} W'_{i,N-1}, & \text{если } i = N \end{cases}$$

Рис. 2. Описание МПСК на основе квантовых преобразователей C<sup>k</sup>NOT

На рис. 2 представлено рекурсивное описание унифицированной схемы расстановки преобразователей для МПСК, где NOT<sub>(1..N-1)</sub> – преобразователь NOT (в скобках указаны порядковые номера кубитов, для которых он применяется), CNOT<sub>(1..N-1)→N</sub> – преобразователь C<sup>k</sup>NOT (в скобках обозначены порядковые номера управляющих кубитов, после стрелки – номер управляемого кубита). Нумерация проведена с единицы.

```

OPENQASM 2.0;      h q[3];          swap q[3],q[4];    h q[3];
include "qelib1.inc"; cu1(pi/2) q[2],q[3]; cx q[0],q[2];      cu1(pi/2) q[2],q[3];
qreg q[5];          cu1(pi/4) q[1],q[3]; x q[4];          cu1(pi/4) q[1],q[3];
creg c[5];          cu1(pi/8) q[0],q[3]; cx q[0],q[1];    cu1(pi/8) q[0],q[3];
x q[0];             h q[2];          ccx q[0],q[1],q[2]; h q[2];
x q[1];             cu1(pi/2) q[1],q[2]; x q[0];          cu1(pi/2) q[1],q[2];
x q[2];             cu1(pi/4) q[0],q[2]; cx q[1],q[2];    cu1(pi/4) q[0],q[2];
x q[3];             h q[1];          x q[1];           h q[1];
                  cu1(pi/2) q[0],q[1]; x q[2];           cu1(pi/2) q[0],q[1];
                  h q[0];          ccx q[1],q[2],q[3]; h q[0];
                  swap q[0],q[3];  cx q[0],q[3],q[4]; swap q[0],q[3];
                  swap q[1],q[2];  x q[0];          swap q[1],q[2];
                  ccx q[1],q[2],q[3]; x q[1];
                  x q[2];          x q[2];
                  swap q[3],q[4];
  
```

Рис. 3. Программная реализация схемы U<sub>F</sub>-W-U<sub>F</sub> для 4 кубитов на OpenQASM

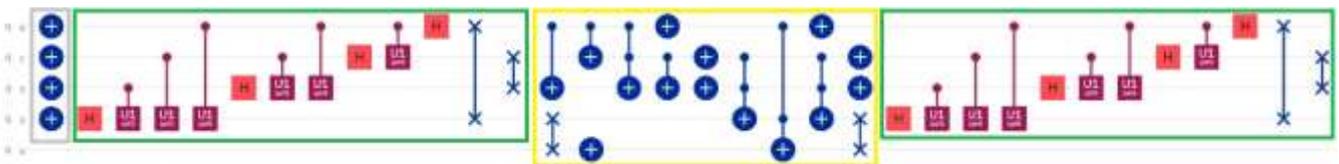


Рис. 4. Квантовая цепь в IBM Quantum по автоматически сгенерированному коду

Результат генерации кода подготовленным нами приложением для 4 кубитов согласно схеме U<sub>F</sub>-W-U<sub>F</sub> представлен на рис. 3. Соответствующие фрагменты схемы выделены цветом: серый – подготовка начальных значений, зеленый – ПКПФ, желтый – МПСК. На рис. 4

представлена визуализация сгенерированной квантовой цепи (горизонтальные линии кубитов обозначены слева символом q от qubit и пронумерованы, начиная с 0).

Рассмотрим процесс последовательной подготовки возможных конфигураций квантовой цепи для МПСК на

примере для 6 кубитов. В соответствии с рекурсивным описанием (рис. 2) формируется состоящая из двух частей начальная конфигурация (рис. 5, слева): первый базовый фрагмент для трех кубитов включает представленные слева четыре преобразователя, следующий далее второй фрагмент состоит из регулярных по структуре групп преобразователей NOT и  $C^k$ NOT.

Согласно правилу взаимного поглощения размещаемых подряд одинаковых преобразователей [1] должны быть удалены следующие друг за другом пары одинаковых  $C^k$ NOT. В результате удаления парных NOT

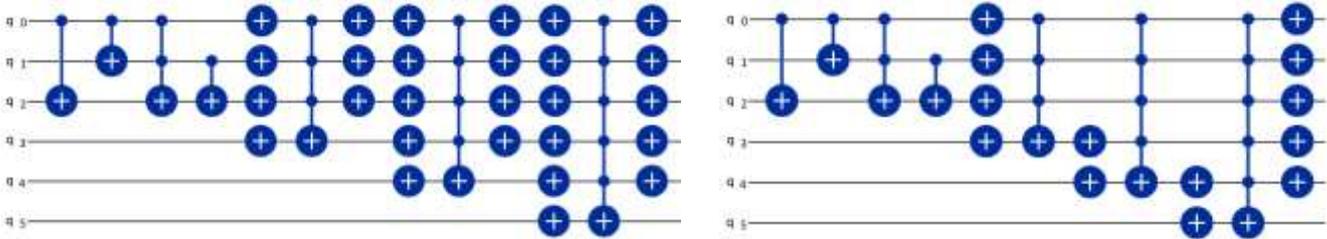


Рис. 5. Квантовые цепи для 6 кубитов, сформированные на основе рекурсивного описания

На теоретическом уровне [1] представлена процедура разложения многокубитового преобразователя  $C^k$ NOT на последовательность преобразователей Тоффли ( $C^2$ NOT). Негативной стороной этой процедуры является то, что необходимы дополнительные кубиты для хранения промежуточных результатов с обязательным возвратом вспомогательных кубитов в исходные состояния. При наличии  $k$  управляющих кубитов необходимо использовать  $k-2$  дополнительных кубитов. Результат

получается представленная на рис. 5 справа упрощенная конфигурация квантовой цепи из NOT и  $C^k$ NOT.

К сожалению, изображенные на рис. 5 квантовые цепи не соответствуют имеющемуся в IBM Quantum набору квантовых преобразователей. В существующих в настоящее время квантовых компьютерах на физическом уровне фактически обеспечивается функционирование только одно- и двухкубитовых преобразователей. Поэтому и среды представления квантовых цепей ограничивают на логическом уровне проектирования работу не более чем с трехкубитовыми преобразователями, поскольку их можно представить совокупностью из двухкубитовых преобразователей.

перехода к конфигурации квантовой цепи с использованием только преобразователей не более чем с 3 кубитами представлен на рис. 6. Для задействования дополнительных кубитов требуется создать переход к ним в прямом и обратных направлениях с помощью расстановки симметричных последовательностей преобразователей SWAP. Графически вместо каждого многокубитового преобразователя  $C^k$ NOT появляется «клин» из преобразователей Тоффли и SWAP.

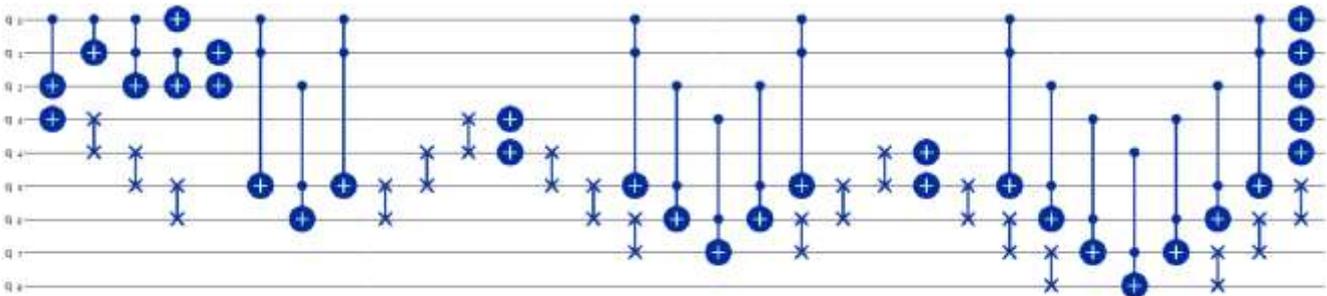


Рис. 6. Конфигурация квантовой цепи после замены преобразователей  $C^k$ NOT

После этой процедуры, ориентированной на физическую реализацию квантового компьютера, существенно ухудшаются важные характеристики квантовой цепи, влияющие на время и погрешности вычислений, – ее глубина (число блоков с параллельной расстановкой и выполнением преобразователей) и сложность ближайшего соседства (наличие расстояния между взаимодействующими кубитами в преобразователе – оптимальным является полное

соседство). В квантовой цепи на рис. 6 есть парные (из разных «клиньев») преобразователи  $C^2$ NOT, которые можно удалить, что приводит к более упрощенной регулярной структуре (рис. 7) с меньшим числом преобразователей  $C^2$ NOT и уменьшенной глубиной квантовой цепи. Однако не происходит появления групп параллельно расставленных преобразователей, а кубиты в преобразователях Тоффли продолжают находиться на отдалении друг от друга.

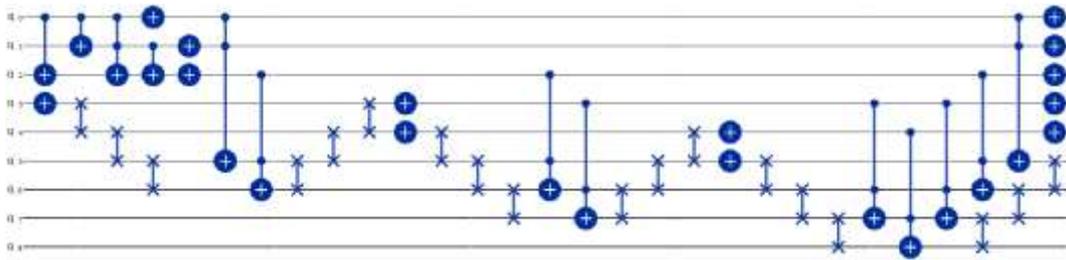


Рис. 7. Конфигурация квантовой цепи после удаления парных преобразователей  $C^4NOT$

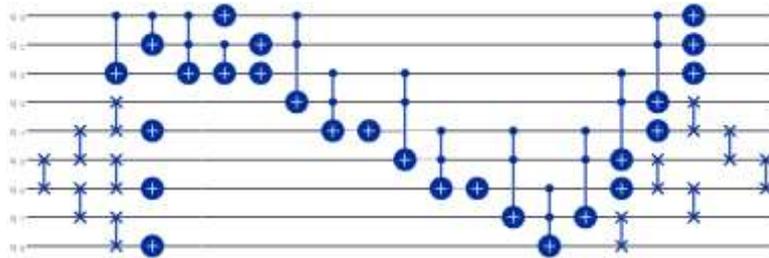


Рис. 8. Конфигурация квантовой цепи МПСК с измененного размещения дополнительных кубитов

На основе регулярной структуры мы предлагаем предварительно учесть итоговое место размещения дополнительных кубитов, осуществить их групповое смещение, ориентируя на их позиции в квантовой цепи кубиты в преобразователях Тоффли. Итоговая конфигурация представлена на рис. 8 – фрагмент с «клиньями» занимает центральное положение, а необходимые перемещения дополнительных кубитов отнесены на предварительный (слева) и заключительный этапы (справа). Сокращено число преобразователей, уменьшена глубина цепи, улучшено ближайшее соседство, появились группы с параллельной расстановкой.

Квантовые цепи на рис. 6–8 были загружены, верифицированы, выполнены на симуляторе `simulator_mps` (до 100 кубитов) в IBM Quantum (повтор 4096 раз). Моделирование не выявило ошибок.

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квантовые технологии активно развиваются, полезны исследования по автоматизированному проектированию квантовых цепей. Наш подход к автоматической генерации конфигураций квантовых цепей с регулярной структурой демонстрирует возникающие подзадачи. Необходимо адаптировать получаемые конфигурации квантовых цепей к физическому размещению кубитов в реальных квантовых компьютерах и стремиться к уменьшению глубины квантовой цепи и снижению числа используемых квантовых преобразователей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Barenco A., Bennett C.H., Cleve R., DiVincenzo D.P., Margolus N., Shor P., Sleator T., Smolin J., Weinfurter H. Elementary gates for quantum computation // *Phys. Rev.* 1995. A52. C. 3457–3467.  
 [2] Nielsen M.A., Chuang I.L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 700 c.

[3] Kane B. A silicon-based nuclear spin quantum computer // *Nature*. 1998. Vol. 393. C. 133–137.  
 [4] Friis N., Marty O., Maier C., Hempel C., Holzäpfel M., Jurcevic P., Plenio M.B., Huber M., Roos C., Blatt R., Lanyon B. Observation of Entangled States of a Fully Controlled 20-Qubit System. // *Phys. Rev.* 2018. X8(021012). 20 c. DOI: 10.1103/PhysRevX.8.021012  
 [5] Calafell I.A., Cox J.D., Radonjić M., Saavedra J.R.M., de Abajo F.J.G., Rozema L.A., Walther P. Quantum computing with graphene plasmons // *Nature: npj Quantum Information*. 2019. Vol. 5, № 1. DOI: 10.1038/s41534-019-0150-2  
 [6] A Review on Quantum Computing: From Qubits to Front-end Electronics and Cryogenic MOSFET Physics / F. Jazaeri, A. Beckers, A. Tajalli, J. Sallèse // *Proc. of 26th Int. Conf. Mixed Design of Integrated Circuits and Systems (2019 MIXDES)* / IEEE, Rzeszow, Poland, 2019. C. 15–25.  
 [7] On the limitations of the Chimera graph topology in using analog quantum computers / D. Vert, R. Sirdey, S. Louise // *Proc. of the 16th Conf. on Computing Frontiers (CF'19)*, April 30–May 2, 2019, Alghero, Italy / ACM, New York, NY, USA, 2019. 4 c. URL: <https://doi.org/10.1145/3310273.3322830>  
 [8] Arute F., Arya K., Babbush R., Bacon D., et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // *Nature*. 2019. Vol. 574. C. 505–510.  
 [9] Efficient mapping of quantum circuits to the ibm qx architectures / A. Zulehner, A. Paler, R. Wille // *Design, Automation & Test in Europe Conf. & Exhibition (DATE)*, IEEE, 2018, C. 1135–1138.  
 [10] Kole A., Datta K., Sengupta I. A New Heuristic for N-Dimensional Nearest Neighbor Realization of a Quantum Circuit // *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 2017. Vol. 37, № 1. C. 182–192.  
 [11] Programming Quantum Computers Using Design Automation / M. Soeken, T. Haener, M. Roetteler // *Proc. of the Design, Automation and Test in Europe (DATE'2018)*, March 19–23, Dresden, Germany, 2018. 10 c. DOI: 10.23919/DATE.2018.8341993  
 [12] Lexical analyzer in CAD for Quantum symbolic model of QFT / I.V. Matveeva, A.V. Dorokhov, V.A. Kalmychkov // *Proc. of the 19th Int. Conf. on Soft Computing and Measurements*, 2016. C. 407–411.  
 [13] Band Y.B., Avishai Y. *Quantum mechanics with applications to nanotechnology and information science*. Academic Press, 2013. 993 c.  
 [14] Cross A.W., Bishop L.S., Smolin J.A., Gambetta J.M. Open quantum assembly language. 2017. arXiv preprint arXiv:1707.03429, URL: <https://arxiv.org/abs/1707.03429>