

# О нейросетевой интерпретации байесовской логико-вероятностной модели нечеткого вывода

Г. И. Кожомбердиева<sup>1</sup>, Д. П. Бураков<sup>2</sup>, Г. А. Хамчиев<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

<sup>2</sup>Независимый исследователь

<sup>1</sup>kgi-liizht@yandex.ru, <sup>2</sup>burakovdmitry8@gmail.com, <sup>3</sup>gyqn@yandex.ru

**Аннотация.** В докладе обсуждается способ построения многослойной нейро-нечеткой сети на основе авторской байесовской логико-вероятностной модели нечеткого вывода. Приводится краткое описание модели и предлагается структура нейро-нечеткой сети. Дается описание непараметрических и параметрических слоев сети. По мнению авторов, предложенная сетевая структура сопоставима с известными нейро-нечеткими сетями Такаги–Сугено–Канга и Ванга–Менделя.

**Ключевые слова:** многослойная нейронная сеть, нейро-нечеткая сеть, нечеткий вывод, нечеткая логика, вероятностная логика, теорема Байеса, байесовская логико-вероятностная модель нечеткого вывода

## I. ВВЕДЕНИЕ

Байесовская логико-вероятностная модель (БЛВ-модель) нечеткого вывода предложена на XXII Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2019), исследована и программно реализована авторами настоящего доклада. Результаты опубликованы в серии статей [1–6].

Идея применения БЛВ-модели нечеткого вывода в нейросетевом контексте обусловлена успешными примерами гибридизации интеллектуальных систем обработки информации (особенно в системах автоматического управления и регулирования), соединения преимуществ систем нечеткого вывода и нейронных сетей в так называемых нечетких (гибридных) нейронных сетях [7–11].

Эффективность аппарата нейронных сетей определяется их аппроксимирующей способностью, благодаря которой нейросети являются универсальными функциональными аппроксиматорами, способными реализовать любую непрерывную функциональную зависимость на основе обучения. В процессе обучения сети любым из алгоритмов происходит изменение параметров сети, благодаря чему происходит адаптация сети таким образом, чтобы результирующие выходные значения соответствовали ожидаемым. Впечатляющие достижения нейронных сетей как наиболее динамично развивающегося направления в области искусственного интеллекта связаны прежде всего со стремительным увеличением вычислительных мощностей и появлением сверхбольших массивов данных, применяемых для обучения. При этом к недостаткам нейросетей относят невозможность объяснить выходной результат, так как накопленные сетью знания распределены между нейронами в виде значений коэффициентов весов.

Этого недостатка лишены системы с нечеткой логикой, однако уже на стадии их проектирования необходимы экспертные знания о способе решения

задачи управления или регулирования, формулирование правил и функций принадлежности. Следовательно, возможность обучения у таких систем отсутствует.

Объединение в гибридных системах нейросетевого и нечеткого подходов позволяет, с одной стороны, привести способность к обучению и параллелизм вычислений, присущие нейронным сетям, в системы нечеткого вывода, а с другой стороны – усилить интеллектуальные возможности нейронных сетей лингвистически интерпретируемыми, нечеткими правилами выработки решений [7, 9, 12].

При этом различают гибриды двух типов [10, 12]: нечеткие нейронные сети (Fuzzy Neural Networks, FNN) и нейро-нечеткие сети (Neuro-Fuzzy Networks, NFN). Гибридные нечеткие нейронные сети (FNN) представляют собой сети (сходные со структурами классических нейронных сетей) на основе нечетких нейронов с нечеткими входами и выходами и/или нечеткими весами. Нейро-нечеткие сети (NFN) могут быть определены как многослойные нейросетевые нечеткие системы, использующие базу нечетких правил для расчета выходного сигнала и обеспечивающие возможность адаптивной настройки значений параметров, подаваемых на параметрические слои.

В обзорной статье [12], а также в работах [13–21] представлены многочисленные примеры использования гибридных сетей обоих типов, свидетельствующие об актуальности и интенсивности современных исследований и разработок в этой области.

В настоящем докладе с целью апробации представлена структура многослойной нейро-нечеткой сети на основе БЛВ-модели [22]. По мнению авторов, предложенная сетевая структура сопоставима с известными нейро-нечеткими сетями Такаги–Сугено–Канга и Ванга–Менделя [8–11].

## II. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ БАЙЕСОВСКОЙ ЛОГИКО-ВЕРЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

Дадим краткое, тезисное описание БЛВ-модели нечеткого вывода, предложенной Г. И. Кожомбердиевой в [1] и подробно представленной в соавторстве с Д. П. Бураковым в [2, 3]. БЛВ-модель нечеткого вывода основана на применении аппарата вероятностной логики и формулы Байеса при выполнении нечеткого вывода по схеме, аналогичной широко известной модели Мамдани.

1. Оригинальным принципом БЛВ-модели является трансформация базы нечетких правил, представленных функциями алгебры логики (ФАЛ), в вероятностные функции, или функции вероятностной логики (ФВЛ). Аргументами ФВЛ являются значения функций

принадлежности термов входных лингвистических переменных (ЛП), а вычисленные значения используются как условные вероятности  $P(e|H_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , представляющие собой степени соответствия набора значений входных переменных  $x_1, \dots, x_N$  («четких» свидетельств) предположениям об истинности байесовских гипотез  $H_1, \dots, H_K$ , соответствующих множеству значений выходной ЛП. Условные вероятности применяются при определении апостериорного байесовского распределения вероятностей  $\{P(H_k|e)\}$ ,  $k = 1, \dots, K$  на множестве гипотез  $\{H_1, \dots, H_K\}$ . Полученное апостериорное распределение вероятностей используется на завершающем этапе нечеткого логического вывода – при дефазификации значения выходной ЛП.

Отметим важную особенность БЛВ-модели – требование совпадения числа нечетких правил и числа термов выходной ЛП, определяющего размер множества байесовских гипотез. При необходимости выполняется редукция множества правил путем объединения всех правил с одинаковым заключением в одно нечеткое правило. Объединенное правило представляет собой дизъюнкцию посылок объединяемых правил, причем весовой коэффициент объединенного правила определяется как среднее арифметическое весов объединяемых правил.

2. Для перехода от представлений нечетких правил в виде ФАЛ к их представлениям в виде ФВЛ булевы функции преобразуются к ортогональной (ОДНФ) либо совершенной дизъюнктивной нормальной форме (ДСНФ). ДСНФ является ортогональной ДНФ, поскольку состоит из полных взаимно ортогональных конъюнкций.

В результате преобразования ФАЛ  $F(x_1, \dots, x_n)$  к ДСНФ она записывается в следующем виде:

$$F_{\text{ДСНФ}}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} a_i x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где  $a_i$  – значение ФАЛ на двоичном наборе значений аргументов с номером  $i = \overline{0, 2^n - 1}$ , а в конъюнкциях, соответствующих двоичным наборам аргументов  $x_1, \dots, x_n$ , для каждого аргумента  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , справедливо:

$$x_j^{\alpha_j} = \begin{cases} x_j, & \text{если } x_j = 1, \\ \bar{x}_j, & \text{если } x_j = 0. \end{cases}$$

Преобразование ФАЛ  $F(x_1, \dots, x_n)$  к ОДНФ выполняется по алгоритму Ю. В. Мерекина, известному, например, из работ [23, 24]. Для получения эквивалентной ей ФАЛ  $F_{\text{ОДНФ}}(y_1, \dots, y_m)$  выполняются следующие действия:

1.  $F(x_1, \dots, x_n)$  приводится к ДНФ, и далее в ДНФ производятся все поглощения и склеивания.
2. Всем элементарным произведениям  $y_j$  в полученной ДНФ присваиваются порядковые номера  $1, \dots, m$ , причем произведениям, состоящим из меньшего числа переменных, присваиваются меньшие номера.
3. Выполняется преобразование:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{\text{ОДНФ}}(y_1, \dots, y_m) = \bigvee_{j=1}^m y_j = y_1 \vee \bar{y}_1 y_2 \vee \dots \vee \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{m-1} y_m.$$

Правила формального перехода от ФАЛ  $F(z_1, \dots, z_m)$ , заданной в ДСНФ или ОДНФ, к соответствующей ей ФВЛ следующие [23]:

1. логические переменные  $z_1, z_2, \dots, z_m$  заменяются соответствующими вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_m$ ;
2. вместо отрицаний  $\bar{z}_i$  используются  $1 - p_i$ ;
3. знаки конъюнкции и дизъюнкции заменяются знаками арифметического умножения и сложения соответственно.

Для наглядности приведем простые примеры преобразования функции дизъюнкции от двух переменных  $F(z_1, z_2) = z_1 \vee z_2$  к ДСНФ и ОДНФ и далее ее трансформации в соответствующую ФВЛ.

Поскольку  $F_{\text{ДСНФ}}(z_1, z_2) = \bar{z}_1 z_2 \vee z_1 \bar{z}_2 \vee z_1 z_2$ , то имеем, переходя к ФВЛ:

$$P(p_1, p_2) = (1 - p_1)p_2 + p_1(1 - p_2) + p_1 p_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2.$$

При использовании  $F_{\text{ОДНФ}}(z_1, z_2) = z_1 \vee \bar{z}_1 z_2$  получаем идентичную ФВЛ:

$$P(p_1, p_2) = p_1 + (1 - p_1)p_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2.$$

3. Апостериорное распределение вероятностей на множестве гипотез рассчитывается по формуле, основанной на формуле Байеса:

$$P(H_k|e) = \frac{w_k P(e|H_k)}{\sum_{i=1}^K w_i P(e|H_i)}, \quad (1)$$

где  $K$  – число байесовских гипотез (термов выходной ЛП), соответствующих числу ФВЛ, используемых для оценивания степени истинности свидетельств в пользу каждой гипотезы,  $w_k$  – вес  $k$ -го правила,  $w_k \in [0; 1]$ . В формуле (1) отсутствуют априорные вероятности, применяемые в классической формуле Байеса, поскольку в контексте нечеткого вывода априорное распределение вероятностей на множестве гипотез принимается равномерным (гипотезы равновероятны).

При дефазификации итоговое значение выходной переменной  $y$  определяется как математическое ожидание дискретной случайной величины  $\hat{y}$ :

$$y = M(\hat{y}) = \sum_{k=1}^K \tilde{y}_k \cdot P(H_k|e), \quad (2)$$

где  $P(H_k|e)$  – элемент апостериорного распределения вероятностей, рассчитанного по формуле (1), а  $\tilde{y}_k$  – характерное значение соответствующего терма выходной ЛП, в качестве которого по умолчанию принимается среднее значение граничных точек, соответствующих термам интервалов  $y_k^{\text{start}}$  и  $y_k^{\text{end}}$  на шкале выходной переменной.

### III. НЕЙРО-НЕЧЕТКАЯ СЕТЬ НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОЙ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ

На рис. 1 в стиле, использованном в [8] при изображении сетей Такаги–Сугено–Канга и Ванга–Менделя, представлена структура нейро-нечеткой сети на основе БЛВ-модели, нейроны которой обеспечивают выполнение операций, необходимых для вычисления значения некоторой выходной функции  $y = f(x_1, \dots, x_N)$  при использовании набора значений входных переменных  $x_1, \dots, x_N$ .

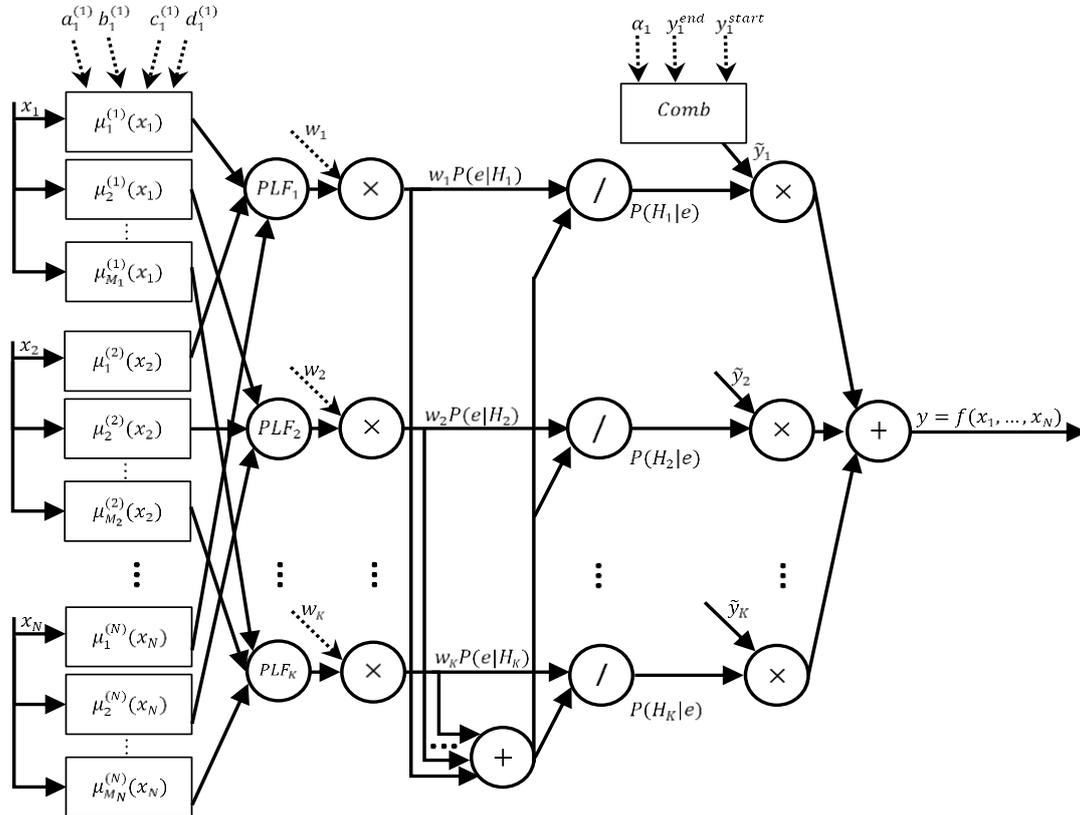


Рис. 1. Структура нейро-нечеткой сети, основанной на БЛВ-модели

В сети выделяется семь слоев:

- *первый (параметрический) слой* выполняет отдельную фазификацию каждой входной переменной  $x_i$ , определяя для каждого нечеткого правила значения функций принадлежности  $\mu_j^{(i)}(x_i)$ . С целью упрощения рисунка параметры, подлежащие адаптации в процессе обучения сети, схематично обозначены на рисунке 1 только для функции  $\mu_1^{(1)}(x_1)$ . Параметры  $a_j^{(i)}, b_j^{(i)}, c_j^{(i)}, d_j^{(i)}$  соответствуют абсциссам вершин трапеции на графике широко используемой трапециевидной функции принадлежности;
- *второй (непараметрический) слой* предназначен для вычисления на основе набора правил, трансформированных в набор ФВЛ (англ. PLF), значений условных вероятностей  $P(e|H_k), k = 1, \dots, K$ . В зависимости от задачи, решаемой нейро-нечеткой сетью, база нечетких правил либо формируется экспертом, либо (в случае отсутствия лингвистической информации) генерируется, например, с помощью известного универсального алгоритма построения базы нечетких правил на основе численных данных [25, 9];
- *третий (параметрический) слой* выполняет умножение результатов, полученных во втором слое, на весовые коэффициенты нечетких правил  $w_k \in [0; 1], k = 1, \dots, K$ , которые могут использоваться как параметры в процессе обучения сети;

- *четвертый (непараметрический) слой* состоит из единственного нейрона-сумматора, вычисляющего сумму взвешенных в третьем слое значений условных вероятности  $P(e|H_k), k = 1, \dots, K$ ;
- *пятый (непараметрический) слой* составляют нейроны, выполняющие операцию деления в соответствии с формулой (1) для получения апостериорного байесовского распределения вероятностей  $\{P(H_k|e)\}$  на соответствующем множестве гипотез  $\{H_1, \dots, H_K\}$  о том, что входная ЛП принимает некоторое  $e$ -е значение из своего терм-множества,  $k = 1, \dots, K$ ;
- *шестой (параметрический) слой* составляют нейроны, выполняющие умножение вероятностей  $P(H_k|e), k = 1, \dots, K$  на характерные значения термов выходной ЛП  $\tilde{y}_k$ . Для вычисления характерных значений используются граничные точки соответствующих термам интервалов  $y_k^{\text{start}}$  и  $y_k^{\text{end}}$  на шкале выходной переменной, а также коэффициенты смещения характерного значения каждого терма  $\alpha_k \in [0; 1]$ . Коэффициенты  $\alpha_k$  являются параметрами настройки сети (по умолчанию принимаются равными 0,5). Характерное значение терма  $\tilde{y}_k$  вычисляется как выпуклая комбинация граничных точек:

$$\tilde{y}_k = (1 - \alpha_k) \cdot y_k^{\text{start}} + \alpha_k \cdot y_k^{\text{end}};$$

- *седьмой (непараметрический) слой* состоит из нейрона-сумматора, формирующего итоговое значение выходной переменной  $y = f(x_1, \dots, x_N)$  в соответствии с формулой (2).

Итак, в структуре нейро-нечеткой сети на основе БЛВ-модели три слоя из семи являются параметрическими. К параметрам сети, которые могут использоваться при ее настройке, относятся:

1. Параметры функций принадлежности  $\mu_j^{(i)}(x_i)$  для входных переменных  $x_1, \dots, x_N, j = 1, \dots, M_N$ .
2. Весовые коэффициенты нечетких правил  $w_k \in [0; 1], k = 1, \dots, K$ .
3. Коэффициенты смещения  $\alpha_k \in [0; 1]$  характерного значения каждого термина выходной ЛП  $\tilde{y}_k, k = 1, \dots, K$ .

Еще раз отметим, что в зависимости от задачи, решаемой нейро-нечеткой сетью, база нечетких правил либо формируется экспертом, либо генерируется с помощью любого алгоритма построения базы нечетких правил на основе численных данных, например, известного универсального алгоритма [25, 9].

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опубликованные в открытых источниках многочисленные примеры использования нечетких нейронных сетей в системах автоматического управления и регулирования свидетельствуют об актуальности и интенсивности современных исследований и разработок в этой области.

В докладе представлена и описана структура нейро-нечеткой сети на основе БЛВ-модели нечеткого вывода, ранее предложенной, исследованной и программно реализованной авторами. По мнению авторов, представленная семислойная сетевая структура с тремя параметрическими слоями сопоставима с известными нечеткими нейронными сетями Такаги–Сугено–Канга и Ванга–Менделя.

Примеры настройки и описание возможностей обучения сети представлены в докладе Г. А. Хамчицева и Г. И. Кожомбердиевой «О настройке и возможностях обучения нейро-нечеткой сети на основе байесовской логико-вероятностной модели», который опубликован в настоящем сборнике.

Авторы полагают, что при выборе подходящей базы нечетких правил на этапе построения сети и далее ее обучении, нейро-нечеткая сеть на основе БЛВ-модели может использоваться в качестве универсального аппроксиматора непрерывной функциональной зависимости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кожомбердиева Г. И. Байесовская логико-вероятностная модель нечеткого вывода // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. 2019. Т. 1. С. 35–38.
- [2] Кожомбердиева Г. И., Бураков Д. П. Байесовская логико-вероятностная модель нечеткого вывода: этапы вывода заключений и дефаззификации // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2019. Т. 14. № 2. С. 92–110.
- [3] Kozhombierdieva G. I., Burakov D. P. Combining Bayesian and logical-probabilistic approaches for fuzzy inference systems implementation // Journal of Physics: Conference Series. 2020. vol. 1703. 012042.
- [4] Кожомбердиева Г. И., Хамчицев Г. А., Бураков Д. П. Программа для решения задач нечеткого вывода на основе байесовской

логико-вероятностной модели. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2021662943 от 09.08.2021.

- [5] Kozhombierdieva G. I., Burakov D. P., Khamchichev G. A. Decision-Making Support Software Tools Based on Original Authoring Bayesian Probabilistic Models // Journal of Physics: Conference Series. 2021. vol. 2224. 012116.
- [6] Кожомбердиева Г. И., Бураков Д. П., Хамчицев Г. А. Разработка программ для поддержки принятия решений на основе байесовских вероятностных моделей // Программные продукты и системы. 2022. № 2. С. 184–194.
- [7] Ярушкина Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. М.: Финансы и статистика. 2004. 320 с.
- [8] Осовский С. Нейронные сети для обработки информации; [пер. с польск. И.Д. Рудинского]. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Горячая линия – Телеком, 2018. 448 с.
- [9] Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы; [пер. с польск. И.Д. Рудинского]. 2-е изд. М.: Горячая линия – Телеком, 2013. 384 с.
- [10] Борисов В. В., Круглов В. В., Федулов А. С. Нечеткие модели и сети. 2-е изд., стереотип. М.: Горячая линия – Телеком, 2018. 284 с.
- [11] Кудинов Ю. И., Келина А. Ю., Кудинов И. Ю., Пашенко А. Ф., Пашенко Ф. Ф. Нечеткие модели и системы управления. М.: ЛЕНАНД. 2017. 328 с.
- [12] Souza P. V. C. Fuzzy neural networks and neuro-fuzzy networks: A review the main techniques and applications used in the literature // Appl. Soft Comput. 2020. vol. 92. 106275.
- [13] Чертилин К. Э., Ивченко В. Д. Настройка адаптивных пропорционально-интегрально-дифференциальных регуляторов системы автоматического регулирования частоты вращения газотурбинного двигателя // Russian Technological Journal. 2020. Т. 8. № 6. С. 143–156.
- [14] Caliskan A., Cil Z. A., Badem H., Karaboga D. Regression based neuro-fuzzy network trained by ABC algorithm for high-density impulse noise elimination // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2020. 28(6):1084–1095.
- [15] Fei J., Wang Z., Liang X., Feng Z., Xue Y. Fractional sliding mode control for micro gyroscope based on multilayer recurrent fuzzy neural network // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2021. 30(6):1712–1721.
- [16] Kordestani M., Rezamand M., Carriveau R., Ting D.S., Saif M. Failure diagnosis of wind turbine bearing using feature extraction and a neuro-fuzzy inference system (ANFIS). 2019. In Proc. Int. Work-Confer. Artif. Neural Netw., pp. 545–556.
- [17] Manikandan T., Bharathi N. Hybrid neuro-fuzzy system for prediction of stages of lung cancer based on the observed symptom values // Biomedical Research. 2017. 28:588–593.
- [18] Siddikov I. X., Umurzakova D. M., Bakhrieva H. A. Adaptive system of fuzzy-logical regulation by temperature mode of a drum boiler // IJUM Engineering Journal. 2020. 21(1):185–192.
- [19] Sinha S. K., Fieguth P. W. Neuro-Fuzzy Network for the Classification of Buried Pipe Defects. Automation in Construction. 2006. 15:73–83.
- [20] Wu X., Han H., Liu Z., Qiao J. Data-knowledge-based fuzzy neural network for nonlinear system identification // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2020. 28(9):2209–2221.
- [21] Zheng K., Zhang Q., Hu Y., Wu B. Design of fuzzy system-fuzzy neural network-backstepping control for complex robot system, Information Sciences. 2021. 546:1230–1255.
- [22] Кожомбердиева Г. И., Бураков Д. П., Хамчицев Г. А. Структура нейро-нечеткой сети на основе байесовской логико-вероятностной модели // Мягкие измерения и вычисления. 2022. Т. 61. № 12. С. 52–64.
- [23] Федоров П. Ф., Яковлев В. В., Добрис Г. В. Стохастические преобразователи информации. Л.: Машиностроение, 1978. 304 с.
- [24] Рябинин И. А. Логико-вероятностный метод и его история // Проблемы анализа риска. 2014. Т. 11. № 3. С. 6–12.
- [25] Wang L. X., Mendel J. M. Generating Fuzzy Rules by Learning from Examples // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. November/December 1992. 22(6):1414–1427.