Оценка потенциального уточнения результатов многократных измерений с асимметричным распределением, достигаемого за счет учета взаимосвязей между измеряемыми величинами

В. А. Гаранин[1], К. К. Семенов[2]
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
[1]s.garanin.v.a@mail.ru, [2]semenov.k.k@gmail.com

Аннотация. **В данной статье рассмотрена задача уточнения результатов измерений, достигаемого за счет учета известных зависимостей между измеряемыми величинами, при условии, что распределение погрешностей результатов измерений может отличаться от нормального. Представлена формула, позволяющая оценить значение потенциально достигаемого уточнения. Приведены практические примеры использования.**

Ключевые слова: согласование результатов измерений; взаимосвязи между измеряемыми величинами; повышение точности; негауссовое распределение погрешностей

I. Введение

Основным способом повышения точности результатов измерений нескольких физических величин, выполняемых на одном объекте измерения, является учет взаимосвязей между значениями измеряемых величин. Соответствующие сведения, выраженные, как правило, в форме математической модели объекта, позволяют добиться снижения погрешностей путем согласования получаемых результатов друг с другом. Подобный подход обеспечивает использование всех доступной информации для получения наибольшей точности. Важным его достоинством является то обстоятельство, что снижение погрешности достигается не за счет изменения состава используемых средств измерений или методики их применения, а лишь интенсификацией процедуры обработки получаемых результатов. Вместе с тем требующееся усложнение соответствующего программного обеспечения зачастую препятствует внедрению процедур согласования данных на практике. Для преодоления данного обстоятельства необходима разработка хорошо алгоритмизируемого унифицированного подхода, который мог бы быть реализован в виде свободного распространяемой программной библиотеки. Тогда включение процедуры согласования данных во вновь создаваемое метрологически значимое программное обеспечение, существенно бы упростилось и удешевилось. Разработка соответствующей библиотеки предполагает необходимость обеспечения возможности ее использования в любых измерительных ситуациях, в том числе отличных от классических, когда погрешности результатов измерений полагают имеющими нормальное распределение. Данная работа представляет подход к оценке потенциального уточнения результатов многократных измерений с асимметричным распределением, достигаемого за счет учета взаимосвязей между измеряемыми величинами, который обладает достаточной степенью универсальности и позволяет помимо прочего выполнять предварительную оценку потенциально достигаемого уточнения, что предоставляет пользователю возможность оценки целесообразности использования процедур согласования данных. В работе представлены примеры применения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта №23-29-00694.

II. Постановка задачи

Пусть измерению подлежат значения величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^\mathrm{T}$, которые изменяются согласованно. Взаимосвязи их значений описываются математической моделью M, состоящей из уравнений $\mathbf{f}_M(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{f}_M = (f_1, f_2, \ldots f_K)^\mathrm{T}$ – вектор-функция. Пусть $\widetilde{\boldsymbol{X}} = (\widetilde{\boldsymbol{x}}_1, \widetilde{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{x}}_N)$ суть результаты многократного измерения величин x_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Здесь $\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^\mathrm{T} = \left(\tilde{x}_{j1}, \tilde{x}_{j2}, \ldots, \tilde{x}_{jn}\right)^\mathrm{T}$, $\tilde{x}_{jk} = x_j + \varepsilon_{jk}$, а ε_{jk} есть случайная погрешность k-го результата измерения величины x_j.

Пусть необходимо выполнить согласование значений $\widetilde{\boldsymbol{x}}_j$ с упомянутой моделью M, выражающей известную информацию о взаимосвязях измеряемых величин. Пусть результатом является вектор $\boldsymbol{x}_j^*$. Задача согласования сводится к поиску условного оптимума вида

$$\boldsymbol{x}_j^* = \underset{\mathbf{x}: f_M(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}{\operatorname{argmin}} \; r_j(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{X}}),$$

где r_j – как правило, функционал, определяемый из принципа максимального правдоподобия. Поскольку закон распределения случайных погрешностей ε_{jk} результатов измерений $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ может быть отличен от нормального, функционал r_j может быть отличен от традиционного

$$r_j(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{X}}) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(x_{jk} - x_j\right)^2}{\operatorname{Var}(\varepsilon_{jk})},$$

где Var – оператор взятия дисперсии.

Для оценки эффективности согласования следует определить, насколько значения $\boldsymbol{x}_j^*$ окажутся точнее оценок $\hat{\mathbf{x}} = \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_N\right)^\mathrm{T}$ измеряемых значений $\mathbf{x}$, полученных лишь на основании результатов $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ их прямых многократных измерений. Оценкой качества согласования выступают, как правило, отношения вида

$$q_j^2 = \frac{n \cdot \operatorname{Var}(\hat{x}_j)}{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(x_{jk}^*)},$$

где чем значение q_j больше, тем большей степени уточнения можно добиться, используя согласование.

В качестве значения $\hat{x}_j$ выступает эффективная оценка центра закона распределения, которому подчиняются результаты многократных измерений $\tilde{\boldsymbol{x}}_j$. Как следствие, значение $\mathrm{Var}(\hat{x}_j)$ определяется из асимптотик метода максимального правдоподобия через информацию Фишера.

Значения дисперсий $\mathrm{Var}(x^*_{jk})$ могут быть оценены приближенно по предложенной ранее авторами методике [1], суть которой сводится к локальной линеаризации модели M и декомпозиции алгоритма условной оптимизации функционалов r_j на независимые подзадачи в предположении, что закон распределения погрешностей результатов измерений нормальный. Тогда

$$\mathrm{Var}\left(x^*_{jk}\right) = \frac{\mathrm{Var}(\hat{x}_j)}{\left(1+\frac{\mathrm{Var}(\hat{x}_j)}{\mathrm{Var}(\check{x}_{jk})}\right)^2} + \frac{\mathrm{Var}(\check{x}_{jk})}{\left(1+\frac{\mathrm{Var}(\check{x}_{jk})}{\mathrm{Var}(\hat{x}_j)}\right)^2}, \qquad (1)$$

где оценки значений $\check{x}_{jk}$ получаются из решения системы уравнений $\mathbf{f}_M(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E}_j+\mathbf{1}_j\cdot y) = \mathbf{0}$ относительно y методом наименьших квадратов. Здесь $\mathbf{E}_j$ – единичная матрица, на j-й позиции главной диагонали которой стоит 0; $\mathbf{1}_j$ – вектор, составленный из нулей кроме j-го элемента, равного 1.

Согласно [1] значение $\mathrm{Var}(\check{x}_{jk})$ может быть оценено путем усечения ряда Тейлора для функционала, описывающего взаимосвязи между согласуемыми величинами:

– если $K = 1$, то

$$\mathrm{Var}\left(\check{x}_{jk}\right) \approx \sum_{i\neq j}\left(\frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E}_j+\mathbf{1}_j\cdot\check{x}_{jk})}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E}_j+\mathbf{1}_j\cdot\check{x}_{jk})}{\partial x_j}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(\hat{x}_i),$$

– если $K > 1$, то

$$\mathrm{Var}\left(\check{x}_{jk}\right) \approx \left(\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{\sigma^2_{ji}}\right)^{-1},$$

$$\sigma^2_{j1} \approx -\left(\frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E}_j+\mathbf{1}_j\cdot\check{x}_{jk})}{\partial x_j}\right)^{-2} \cdot \sum_{i\neq j}\left(\frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E}_j+\mathbf{1}_j\cdot\check{x}_{jk})}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(\hat{x}_i),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma^2_{jK} \approx -\left(\frac{\partial f_K(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E}_j+\mathbf{1}_j\cdot\check{x}_{jk})}{\partial x_j}\right)^{-2} \cdot \sum_{i\neq j}\left(\frac{\partial f_K(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E}_j+\mathbf{1}_j\cdot\check{x}_{jk})}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(\hat{x}_i).$$

Представленная схема решения позволяет осуществить согласование данных для достаточно большого количества измерительных ситуаций, но предполагает, что распределение погрешностей результатов измерений нормально. В негауссовском случае степень достигаемого уточнения может существенно снизиться. Для преодоления данного обстоятельства введем учет отличий закона распределения от нормального.

III. Учет негауссовости распределения погрешностей

Для того, чтобы принять во внимание отличие закона распределения $\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{X}})$ погрешностей результатов измерений $\tilde{\boldsymbol{X}}$ от нормального, можно использовать два подхода:

- когда оценки $\hat{x}_j = \hat{x}_j^{pr}$ строятся параметрически для установленного заранее закона распределения $\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{X}})$,
- когда выполняется непараметрическое оценивание $\hat{x}_j = \hat{x}_j^{npr}$, справедливое для произвольного закона $\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{X}})$.

Каждый из этих способов будет характеризоваться разной степенью достигаемого уточнения. Для получения оценки снизу на степень потенциального уменьшения погрешности используем в приближении (1) оценки $\hat{x}_j = \hat{x}_j^{pr}$, характеризующиеся наименьшей дисперсией в силу своей эффективности. Тогда получаем, что

$$q^2_{j\,[s]} = \frac{\mathrm{Var}\left(\hat{x}_j^{[s]}\right)}{\mathrm{Var}\left(\hat{x}_j^{pr}\right) \Big/ \left(1+\frac{\mathrm{Var}\left(\hat{x}_j^{pr}\right)}{\mathrm{Var}\left(\check{x}_{jk}^{pr}\right)}\right)^2 + \mathrm{Var}\left(\check{x}_{jk}^{pr}\right) \Big/ \left(1+\frac{\mathrm{Var}\left(\check{x}_{jk}^{pr}\right)}{\mathrm{Var}\left(\hat{x}_j^{pr}\right)}\right)^2}, \qquad (2)$$

где в качестве идентификатора [s] следует подставлять pr (для параметрических оценок) или npr (для непараметрического случая соответственно).

Для оценки дисперсии $\mathrm{Var}(\hat{x}_j^{npr})$ предлагается использовать неравенство Крамера–Рао (при соблюдении условий регулярности и несмещенности $\hat{x}_j^{npr}$)

$$\mathrm{Var}\left(\hat{x}_j^{npr}\right) \geq I_n^{-1}\left(\hat{x}_j^{npr}\right),$$

где $I_n(x_j)$ – информация по Фишеру. Пусть искомые величины x_j выступают в качестве параметров сдвига плотностей $\boldsymbol{\varphi}_j(\hat{x}_j^{npr}, \boldsymbol{\theta})$ распределения оценок $\hat{x}_j^{npr}$, где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ – прочие параметры распределения.

Поскольку случайные погрешности результатов многократных измерений реализуются независимо, но подчинены одному закону, то

$$I_n\left(\hat{x}_j^{npr}\right) = -E\left[\frac{\partial^2 L_j\left(\hat{x}_j^{npr}, \boldsymbol{\theta}\right)}{\partial \mu_j^2}\right],$$

где $L_j = \sum_{k=1}^{n} \ln \varphi_j\left(\hat{x}_{jk}^{npr}, \boldsymbol{\theta}\right)$ – логарифмическая функция правдоподобия, E – оператор вычисления математического ожидания, а μ_j – математическое ожидание результатов измерения $\tilde{\boldsymbol{x}}_j$ (в случае систематических погрешностей может не совпадать с x_j).

Непараметрические подходы основываются на той или иной процедуре оценки распределения φ_j, позволяющей охватить широкое семейство возможных распределений. Для оценки степени повышения точности, достигаемого за счет непараметрического согласования результатов совместных измерений $\tilde{\boldsymbol{X}}$, в качестве алгоритма построения оценки плотности распределения φ_j использован проекционный метод, заключающийся в приближении φ_j ее усеченным рядом Грама–Шарлье.

Пусть в качестве опорной плотности φ_{0j}, относительно которой выполняется разложение в ряд, выбран нормальный закон. Обозначим для краткости $\mathrm{Var}[\tilde{x}_{jk}]$ как σ_j^2. Ограничимся при разложении в ряд Грама–Шарлье лишь первым слагаемым. Тогда получим:

$$L_j = \sum_{k=1}^{n} \ln \varphi_j\left(\hat{x}_{jk}, \boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln \varphi_{0j}\left(\hat{x}_{jk}, \boldsymbol{\theta}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{6} \cdot Sk_j \cdot H_3\left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j}\right)\right),$$

где Sk_j – коэффициент асимметрии соответствующей плотности φ_j случайной погрешности результатов $\tilde{\boldsymbol{x}}_j$ измерения x_j, H_s – полином Эрмита порядка s.

Если принять, что асимметрия мала, $|Sk_j| << 1$, то

$$\frac{\partial L_j}{\partial \mu_j} \approx \frac{1}{\sigma_j^2} \cdot n \cdot \bar{x}_j - \frac{1}{\sigma_j^2} \cdot n \cdot \mu_j - \frac{Sk_j}{2 \cdot \sigma_j} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2 - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot Sk_j \cdot H_3\left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j}\right)\right),$$

$$\frac{\partial L_j^2}{\partial^2 \mu_j} \approx -\frac{n}{\sigma_j^2} - \frac{Sk_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} - \frac{Sk_j}{6} \cdot \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^4 + \frac{Sk_j}{2} \cdot \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2\right) - \frac{Sk_j^2}{4 \cdot \sigma_j^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2 + 1\right).$$

В силу независимости результатов многократных измерений получаем, что

$$\mathrm{M}\left[\frac{\partial L_j^2}{\partial^2 \mu_j}\right] \approx -\frac{n}{\sigma_j^2} + \frac{Sk_j^2}{6 \cdot \sigma_j} \cdot n \cdot (Ku_j - 3) - \frac{Sk_j^2}{4 \cdot \sigma_j^2} \cdot n \cdot (Ku_j - 1),$$

где Ku_j – коэффициент эксцесса плотности φ_j случайной погрешности результатов $\tilde{\boldsymbol{x}}_j$ измерения значения x_j.

Тогда значение степени уточнения, потенциально достижимого за счет непараметрического согласования результатов совместного измерения величин **x**, может быть приближенно оценено по (2). При этом, как было отмечено выше, необходимо в качестве $\mathrm{Var}(\hat{x}_j^{npr})$ использовать оценку по неравенству Крамера–Рао:

$$\mathrm{Var}(\hat{x}_j^{npr}) \geq \left(\frac{1}{\sigma_j^2} - \frac{Sk_j^2}{6 \cdot \sigma_j^2} \cdot (Ku_j - 3) + \frac{Sk_j^2}{4 \cdot \sigma_j^2} \cdot (Ku_j - 1)\right)^{-1} / n. \quad (3)$$

Получаемые таким образом оценки потенциального уточнения по (2) состоятельны в той мере, в какой окажется состоятельной оценка плотности φ_j, полученная путем усечения ряда Грама–Шарлье.

IV. Численное моделирование

Полученная аналитическая оценка неопределенности результата непараметрической оценки искомых величин **x** по результатам ее многократного измерения была сопоставлена с результатами численного эксперимента методом Монте-Карло. Для вычисления эффективной оценки значения искомых величин **x** был использован подход [2], построенный на принципе максимального правдоподобия и включающий в себя процедуру учета отклонения закона распределения погрешностей от нормального, с применением усеченного ряда Грама–Шарлье.

Для заданных значений **x** были сгенерированы массивы возможных значений их случайных погрешностей ε_{jk}, $j = 1, 2, \ldots, N$ и $k = 1, 2, \ldots, n$ и результатов многократных измерений из заданных распределений в программном пакете Matlab. В качестве таковых были взяты следующие асимметричные законы: распределения Стьюдента, «хи-квадрат», лог-нормальное и бета. На рис. 1 представлена часть использованных плотностей с математическим ожиданием, приведенным к единице.

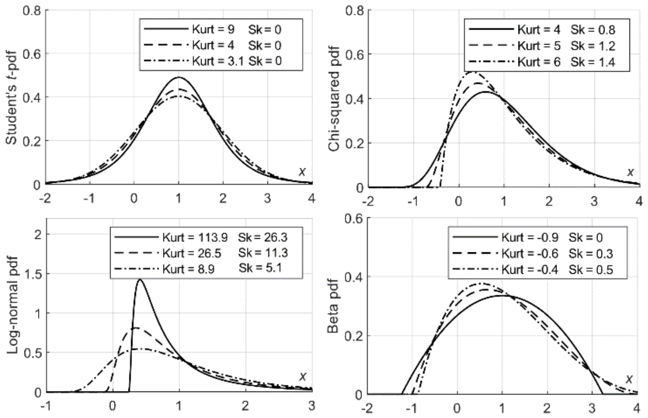


Рис. 1. Семейства распределений случайных величин с варьируемыми значениями коэффициентов асимметрии *Sk* и эксцесса *Kurt* = *Ku*–3

Численный эксперимент по методу Монте-Карло включал $K = 10^5$ повторов для набора статистики. На каждой итерации генерировалась выборка результатов многократных измерений величины x_j объемом $n = 512$.

Были вычислены значения коэффициента уточнения q_j, достигаемого за счет непараметрического согласования. Рис. 2 демонстрирует характер изменения значений q_j по мере увеличения асимметрии распределения случайных погрешностей результатов измерений.

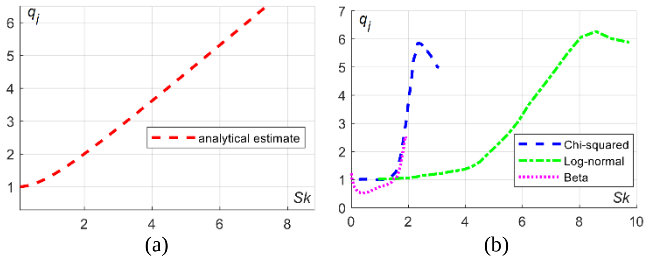


Рис. 2. Измерение степени (раз) уточнения, достигаемого за счет непараметрического согласования: (a) – численная оценка дисперсий по методу Монте-Карло для указанных распределений, (b) – аналитическая оценка предложенным методом при $Ku = 3$ и $Sk \in [0, 9]$

Поскольку при вычислении границы (3) для значений дисперсии непараметрической оценки результатов согласования использовано разложение плотности распределения погрешностей в ряд Грама–Шарлье относительно нормального закона, то вполне ожидаемо, что соответствующая оценка наилучшим образом описывает измерительные ситуации в тех случаях, когда действительные (в данном случае модельные) законы распределения погрешности походят на гауссов закон. По этой причине приближение (3) особенно удачно описывает поведение результатов для случая логнормального закона.

В диапазоне значений коэффициента асимметрии от 0 до 6 приближенная оценка (3) оказывается вполне соотносима с результатами, получаемыми для конкретных реальных распределений. Это свидетельствует о том, что оценки потенциального уточнения, вычисляемые по (2) и (3), могут быть использованы в качестве *предварительной* оценки целесообразности внедрения алгоритмов непараметрической статистики для согласования результатов измерений взаимосвязанных величин.

V. Пример применения

Рассмотрим следующую измерительную ситуацию. Пусть в испытательном лабораторном бассейне для исследований процессов в жидкости выполняется генерация периодических волн фиксированных амплитуды и длинны. Пусть волны накатывают на частично проницаемую преграду, моделирующую гидротехническое сооружение, с образованием квази-стоячих волн. С помощью трех уровнемеров выполнены совместные измерения величин: h_1 – амплитуды пучности квази-стоячей волны в области перед преградой, h_2 – амплитуда узла квази-стоячей волны перед преградой и h_3 – амплитуда волны, проходящей за преграду. При подобном физическом моделировании процессов взаимодействия морских волн с гидротехническими сооружениями инженерный интерес представляют коэффициенты отражения и прохождения волны через препятствие, p_{refl} и p_{trans} соответственно. Дан-ные коэффициенты определяются как

$$p_{\text{trans}} = \frac{2\cdot h_3}{h_1+h_2},\ p_{\text{refl}} = \frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}. \tag{4}$$

Если пренебречь потерями волновой энергии при прохождении через преграду, то согласно закону сохранения энергии значения величин p_{trans} и p_{refl} связаны:

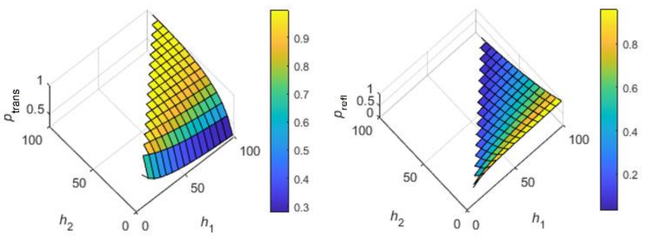
$$f_M(\boldsymbol{p}) = p_{\text{trans}}^2 + p_{\text{refl}}^2 - 1 = 0,$$

где $\mathbf{p} = (p_{\text{trans}}, p_{\text{refl}})^{\mathrm{T}}$.

Как правило, законы распределения результатов измерений значений величин h_i, $i = 1, 2, 3$, распределены по законам, мало отличающимся от гауссова. При этом распределения случайных погрешностей оценок коэффициентов p_{trans} и p_{refl} могут существенно отличаться от нормального в силу того, что значения h_i входят в соответствующие им выражения нелинейно.

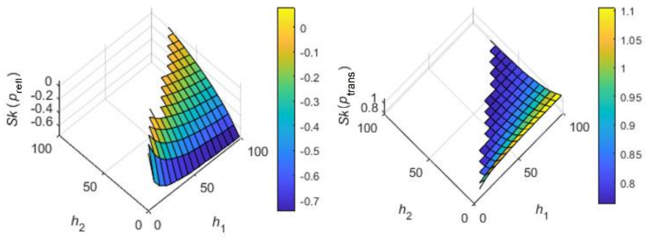
На рис. 3 приведены значения оценок $\hat{p}_{\text{trans}}$ и $\hat{p}_{\text{refl}}$ для всех физически возможных сочетаний значений величин h_1 и h_2, см (величина h_3 в данном случае рассматривается как зависимая от них переменная). На рис. 4 приведены значения коэффициента асимметрии оценок $\hat{p}_{\text{trans}}$ и $\hat{p}_{\text{refl}}$, вычисленные в рамках статистического эксперимента объемом 10^6 повторов.

Из рис. 3 и 4 видно, что для многих гидротехнических сооружений закон распределения погрешностей согласуемых результатов косвенных измерений $\hat{p}_{\text{trans}}$ и $\hat{p}_{\text{refl}}$ далек от нормального.



(a) (b)

Рис. 3. Значения коэффициентов прохождения (a) и отражения (b) волны от преграды в гидроволновом бассейне

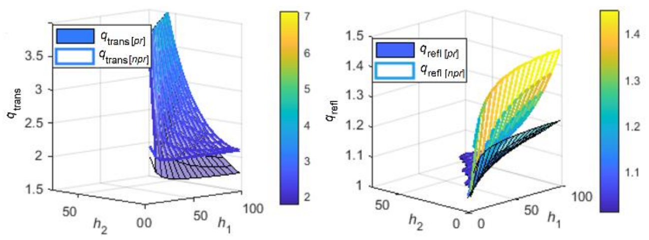


(a) (b)

Рис. 4. Значения коэффициентов асимметрии оценок результатов косвенного измерения коэффициентов p_{refl} (a) и p_{trans} (b)

В рамках предварительной оценки был выполнен метрологический анализ результатов непараметрического согласования оценок $\hat{p}_{\text{trans}}$ и $\hat{p}_{\text{refl}}$. Были получены оценки степени потенциального уточнения при использовании непараметрического согласования по представленным в данной работе соотношениям, а именно величины $q_{\text{trans}\,[pr]}$ и $q_{\text{refl}\,[pr]}$, $q_{\text{trans}\,[npr]}$ и $q_{\text{refl}\,[npr]}$ – значения степени повышения точности измеряемых величин в результате согласования эффективных параметрических оценок и степени повышения точности в целом (за счет непараметрического согласования косвенно измеряемых величин p_{trans} и p_{refl}).

На рис. 5a приведены графики величин $q_{\text{trans}\,[pr]}$ и $q_{\text{trans}\,[npr]}$, а на рис. 5b – величин $q_{\text{refl}\,[pr]}$ и $q_{\text{refl}\,[npr]}$.



(a) (b)

Рис. 5. Значения степени повышения точности (раз) за счет параметрического согласования в сравнении с непараметрическим согласованием (приближенная аналитическая оценка)

Из графиков на рис. 5 видно, что в наибольшей степени процедура согласования позволяет уточнить значения коэффициента прохождения волны через преграду. В то же время учет отклонения распределения погрешностей от нормального в большей степени позволяет уточнить результаты косвенного измерения коэффициента отражения. При этом оказывается снижена неопределённость результатов измерений, вызванная случайными отклонениями результатов мгновенных измерений уровня воды.

На рис. 6 представлены соответственно значения $q_{\text{trans}\,[npr]}$ (рис. 6a) и $q_{\text{refl}\,[npr]}$ (рис. 6b). Отдельными крестиками изображены результаты численного статистического эксперимента объемом в 10^5 испытаний, в рамках которого выполнялась генерация выборок результатов многократных измерений величин h_1, h_2, h_3, вычислялись косвенные оценки коэффициентов p_{trans} и p_{refl}, а затем на набранной статистике численно оценивались значения $q_{\text{trans}\,[npr]}$ и $q_{\text{refl}\,[npr]}$.

В качестве алгоритма непараметрического согласования в рамках упомянутого численного эксперимента использовался предложенный авторами метод [2].

Полученные результаты показывают, что предложенная в данной статье аналитическая оценка степени потенциального уточнения результатов непараметрического согласования является достаточно точной, хотя и несколько смещенной в статистическом смысле (рис. 7).

Возникающее смещение обусловлено вынужденным усечением ряда Грама–Шарлье при оценке неизвестной плотности распределения случайных погрешностей. Вместе с тем использование членов ряда старших порядков является нецелесообразным из-за резкого роста соответствующей им статистической погрешности.

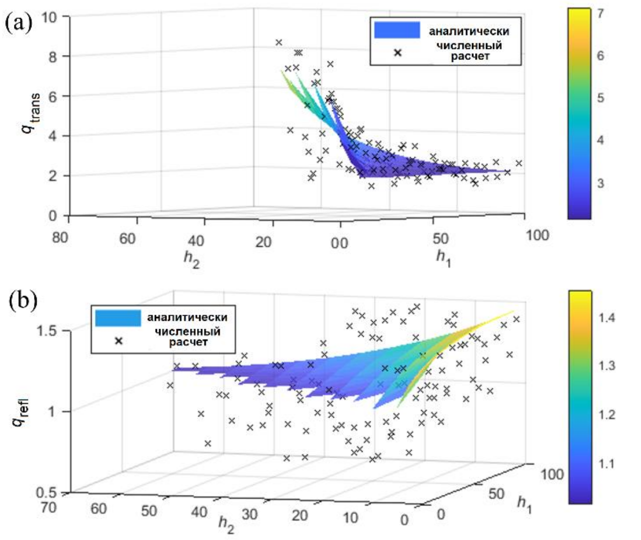
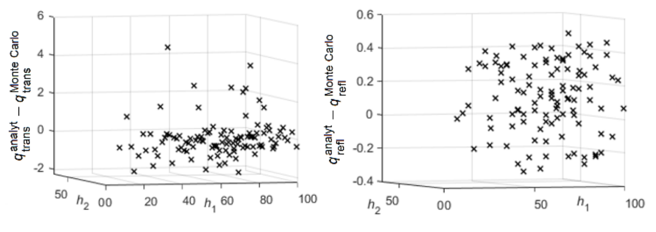


Рис. 6. Сравнение аналитической (приближенной) и численной оценки степени повышения точности $q_{[npr]}$ за счет непараметрического согласования коэффициентов прохождения и отражения волны



(a) (b)

Рис. 7. Разности между результатами приближенной аналитической оценки величины $q_{[npr]}$, выполненной предложенным методом, и в ходе статистического эксперимента

VI. Выводы

В данной статье рассмотрена задача оценки степени уточнения результатов измерений, достигаемого за счет учета известных зависимостей между измеряемыми величинами, для случая, когда распределение погрешностей результатов измерений может отличаться от нормального. Выполненное теоретическое исследование позволило получить замкнутую аналитическую формулу, по которой пользователь имеет возможность оценить степень потенциально достигаемого уточнения, что создает возможность для предварительного анализа целесообразности использования процедур согласования данных и предполагаемого возникающего экономического эффекта. В работе выполнена оценка достоверности получаемых оценок с помощью численного статистического моделирования, показавшего достаточную точность оценок на основе выведенных соотношений. Представлен практический пример успешного использования для случая негауссова распределения случайных погрешностей результатов измерений.

Список литературы

[1] Garanin V.A., Semenov K.K. (2021). The Systematic Approach for Estimating the Potential Increase of Measurement Results Accuracy Achieved by the Use of Dependencies between Measurands. In: 2021 XXIV International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM). IEEE. P. 15-18.

[2] Garanin V.A., Semenov K.K. (2021) Semi-nonparametric approach for measured data reconciliation based on the Gram-Charlier series expansion. Measurement: Sensors. 2021. Vol. 18. Paper 100351.