

# Исследование предельного положение прямой Попова для обеспечения абсолютной устойчивости систем управления

К. В. Мартиросян<sup>1</sup>, А. Б. Чернышев<sup>1</sup>, А. В. Мартиросян<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Северо-Кавказский федеральный университет

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский горный университет

kv1961@live.ru, chalbor@rambler.ru, martirosyan320@gmail.com

**Аннотация.** Данная научная статья представляет собой исследование устойчивости нелинейных систем. Одним из наиболее известных критериев устойчивости является критерий Попова, который можно использовать для исследования абсолютной устойчивости. Исследование и совершенствование существующих критериев является важным научным направлением, особенно в разработке систем управления технологическими процессами и производствами. Существуют проблемы изучения абсолютной устойчивости систем управления, одна из которых заключается в том, что в случае потери или отсутствия устойчивости какая-либо нелинейная характеристика может быть описана только определённой областью. В данной работе описан метод графического представления критерия устойчивости Попова, способный повысить точность и качество определения устойчивости для линейной части системы любой сложности.

**Ключевые слова:** системы управления, устойчивость системы, абсолютная устойчивость, критерий Попова, распределенные системы, нелинейные системы, графические критерии

## I. ВВЕДЕНИЕ

Автоматизация и компьютеризация производства является одним из наиболее активно развивающихся направлений в науке, технике и технологиях. Внедрение вычислительной техники, специализированных программ, приложений и интернет-сервисов в технологические процессы является необходимым условием повышения эффективности производства. Внедрение технологий автоматизации и компьютеризации способно обеспечить высокую надежность и эффективность управления процессами производства, что особенно важно для процессов минерально-сырьевого [10], в которых необходимо поддерживать постоянный контроль или мониторинг параметров [3]. К таким процессам можно отнести разработку угольных [2, 7] и нефтяных месторождений [6], добычу минеральных вод [5, 12], металлургической промышленности [4, 9, 11]. Для решения частных задач вышеперечисленных областей используются разные типы систем: системы мониторинга, системы поддержки принятия решений, системы управления и др.

В представленной работе предлагается обратить внимание именно на системы управления (СУ), так как они не просто обрабатывают данные, поступающие в процессе функционирования, но и вырабатывают управляющее воздействие, оказывая тем самым прямое влияние на процесс [8]. Современный уровень исследований принципов и алгоритмов СУ позволяет

обеспечить высокую надежность контроля параметров производственного процесса. Эффективность систем управления напрямую зависит от степени описания объекта управления – чем лучше известна интенсивность и характер процесса, тем выше качество управления [1]. Абсолютное большинство технологических процессов минерально-сырьевого комплекса могут быть описаны с достаточной точностью, но, имея дело с природными объектами, появляются проблемы:

- недостаточная точность описания объекта, вызванная невозможностью проведения геологических или опытно-фильтрационных работ;
- нелинейность распределения параметров добычи, вызванная неоднородностью поверхности или характеру залегания ресурсов;
- трудно прогнозируемые воздействия внешней среды, вызванные перепадами давления, техногенными изменениями и т. д.

Учет и постоянный мониторинг полного спектра возможных воздействий не представляется возможным ввиду огромного количества вычислений и низкой эффективности управляющего воздействия. Для обеспечения возможности нивелировать отрицательное воздействие внешней среды к системам управления выдвигаются требования к устойчивости.

Исследование устойчивости систем управления является важным научным направлением не только с точки зрения фундаментальных исследований, но и для технических разработок. В практическом аспекте устойчивость представляет собой не только непрерывную работу системы на заданном отрезке времени в заданных условиях или компенсацию влияния изменяющихся параметров процесса управления, но также способность уменьшения износа оборудования, путем контроля нормального режима эксплуатации. Современным системам необходимо обеспечивать не только саму возможность возвращения к равновесному состоянию, но минимизировать затрачиваемый технический и энергетический ресурс. Поэтому анализ устойчивости систем является неотъемлемой частью изучения методов управления.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возникают случаи, когда нелинейная характеристика системы неустойчива. В таких случаях наряду с классическим анализом устойчивости проводится исследование абсолютной устойчивости системы. В

общем смысле, устойчивость системы – это возможность системы возвращаться к начальному (равновесному) состоянию, в условиях определенных пределов отклонений в том случае, если реальные отклонения не выходят за эти пределы. Под абсолютной устойчивостью понимается способность системы вернуться к заданному состоянию при любых начальных отклонениях с учетом определенного класса нелинейностей. В случае управления и автоматизации процессом, в котором участвует природный объект необходимо учитывать нелинейность, которая, безусловно, дестабилизирует систему, ухудшает качество управления и значительно усложняет исследование системы, но также необходимо для отражения сущности и поведения реального объекта. Одним из критериев определения абсолютной устойчивости нелинейных систем является критерий В.М. Попова. Достоинством этого критерия является возможность определения абсолютной устойчивости нелинейной характеристики любой формы при любых начальных отклонениях в системе [13]. Если контролируемые величины изменяются не только во времени, но и в пространстве, то рассматриваемая система относится к классу распределенных. Для описания таких систем обычно используют уравнения в частных производных [14]. Далее предлагается рассмотреть разработанный метод определения устойчивости системы с использованием графической интерпретации критерия Попова.

### III. МЕТОДЫ

В качестве примера предлагается нелинейная система с сосредоточенными параметрами. На рис. 1 представлена структурная схема данной системы с одним нелинейным элементом.

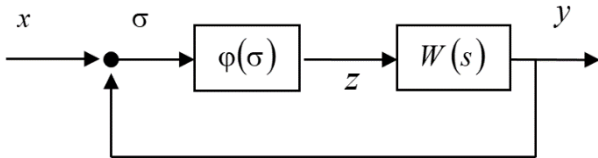


Рис. 1. Структурная схема системы

Предполагая, что все полюсы передаточной функции  $W(s)$  линейной части системы имеют отрицательные действительные части, предполагая, что линейная часть разомкнутой системы устойчива. В случае определения абсолютной устойчивости при условии попадания характеристики нелинейного элемента в сектор  $[0; k]$  (рис. 2) должны выполняться следующие условия:  $\varphi(0) = 0, 0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}, \text{ at } \sigma \neq 0 \text{ or } 0 \leq \varphi(\sigma) \leq k\sigma$ .

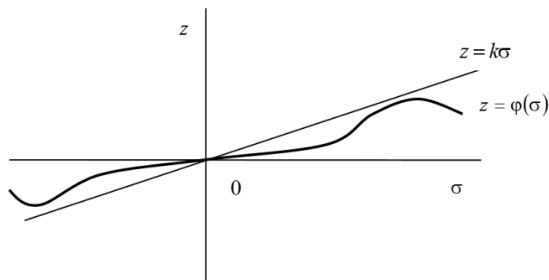


Рис. 2. Сектор абсолютной устойчивости

Следует учитывать, что вид функции  $z = \varphi(\sigma)$  не имеет значения, если выполняется условие попадания

графика функции в заданный сектор, ограниченный сверху прямой  $z = k(\sigma)$ , а со стороны ниже прямой линией выполняется  $z = 0$ . Таким образом, можно утверждать, что вид нелинейной характеристики является единственным параметром, влияющим на значение коэффициента  $k$  тангенса угла абсолютной устойчивости. Величина  $k$  определяет точку на вещественной оси комплексной плоскости, через которую проходит линия Попова  $X - qY + \frac{1}{k} = 0$ , где  $X = \text{Re}[W(j\omega)], Y = \omega \text{Im}[W(j\omega)], W^*(j\omega) = X + jY$ , (рис. 3).

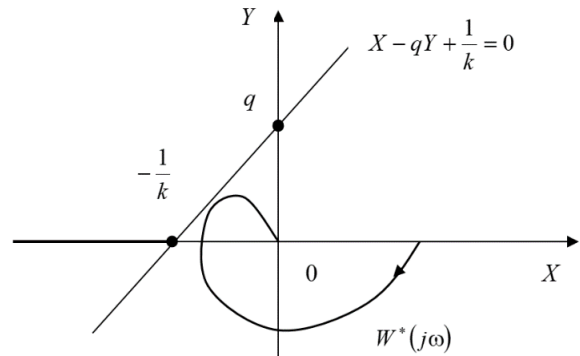


Рис. 3. Иллюстрация критерия абсолютной устойчивости для систем с сосредоточенными параметрами

В процессе определения значения параметра  $k$  желательно найти наименьшее из возможных, которое позволит сместить точку  $-\frac{1}{k}$  влево по оси  $X$  и тем самым увеличить запас устойчивости.

Если график функции  $z = \varphi(\sigma)$  меняет направление выпуклости в точке  $\sigma = 0$ , то  $k = \varphi'(0)$  (рис. 4б). Например:  $z = \sin\sigma, \dot{z} = \cos\sigma$ , при  $\sigma = 0, = 1$ . Для релейного элемента  $k = \infty$ , (рис. 4 а, б). Поэтому линия Попова всегда проходит через начало комплексной плоскости. Таким образом, для того чтобы система с релейным элементом была абсолютно устойчивой, модифицированная частотная характеристика линейной части системы  $W^*(j\omega)$  не должна пересекать ось  $OY$  комплексной плоскости, т. е. не должна располагаться в вторая и третья координатные четверти.

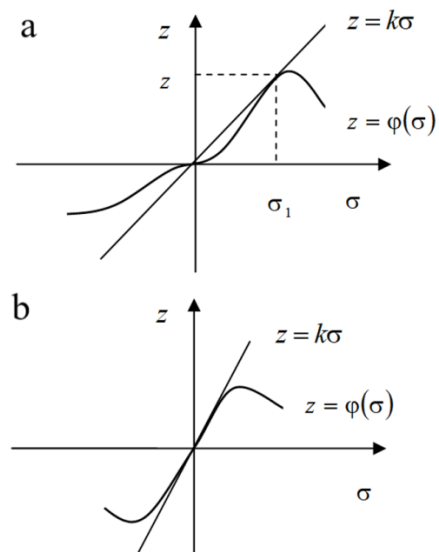


Рис. 4. Построение линии Попова

Если линейная часть системы задана, то можно перейти к определению максимального угла сектора [6]. Если рассматриваются нелинейные элементы с дифференцируемыми статическими характеристиками, то по заданной нелинейной характеристике можно определить предельный наклон прямой  $z = k\sigma$ . Прямая  $z = k\sigma$  проходит через начало координат и касается кривой  $z = \varphi(\sigma)$ , где выполняются следующие условия  $-z_1 = \varphi(\sigma_1)(\sigma - \sigma_1)$ ;  $z = \frac{z_1}{\sigma_1}\sigma$  выполняются для точки касания  $(\sigma_1, z_1)$ .

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть линейная часть системы описывается типичным аperiodическим звеном:

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Частотная характеристика определяется выражением:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Модифицированная частотная характеристика:

$$W^*(j\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{K\omega^2 T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Мнимая часть модифицированной АЧХ:

$$Y(\omega) = -\frac{K\omega^2 T}{1 + \omega^2 T^2}; \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = 0; \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K\omega^2 T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{K}{T}$$

Таким образом, система с нелинейной характеристикой релейного типа и линейной частью, описываемой аperiodическим звеном, всегда будет абсолютно устойчивой.

Рассмотрим передаточную функцию  $W$  для объекта с распределенными параметрами, математическая модель которого имеет вид:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = \varphi[\sigma(t)];$$

$$Q(x,0) = Q_0(x); Q(0,t) = q_1(t);$$

$$Q(l,t) = q_2(t); 0 \leq x \leq l; t \geq 0; a > 0.$$

$$W(x, \xi, s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi}{s + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2}$$

Передаточная функция для каждого контура пространственно-инвариантной системы может быть представлена в виде:

$$W_n(s) = \frac{2l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi}{n^2 a^2 \pi^2} \frac{l^2}{n^2 a^2 \pi^2 s + 1}$$

Обозначая:  $K_n = \frac{2l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi}{n^2 a^2 \pi^2}$ ,  $T_n = \frac{l^2}{n^2 a^2 \pi^2}$ , теперь получена классическая передаточная функция

$W_n(s) = \frac{K_n}{T_n s + 1}$ . Предлагается строить модифицированный

пространственный годограф для первых 6 гармоник ряда при значениях  $\epsilon = x = \frac{l}{4}$ , вводя обобщенную координату  $G = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) (рис. 5).

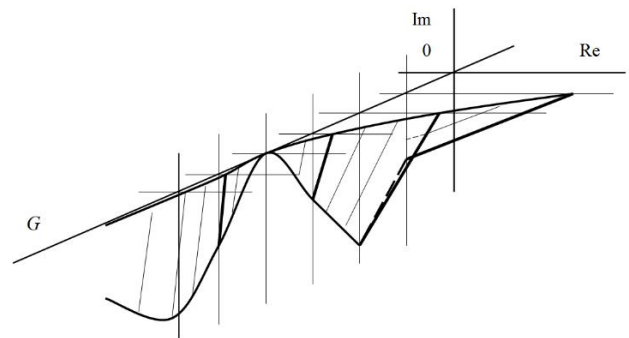


Рис. 5. Модифицированный годограф пространственно-аperiodического звена

В случае, когда объект может быть описан уравнением теплопроводности с граничными условиями первого рода, то он может быть представлен бесконечным числом параллельно соединенных аperiodических инерционных звеньев первого порядка. Это утверждение справедливо при следующем условии, что  $T_n = \left(\frac{l}{a\pi n}\right)^2$  постоянна для каждого контура, а передаточные коэффициенты зависят от точек наблюдения  $x$  и действия источников  $\epsilon$ .

#### V. ОБСУЖДЕНИЕ

Для более наглядного графического представления, модифицированный годограф пространственно-аperiodического звена может быть представлен для каждой пространственной гармоники (рис. 6).

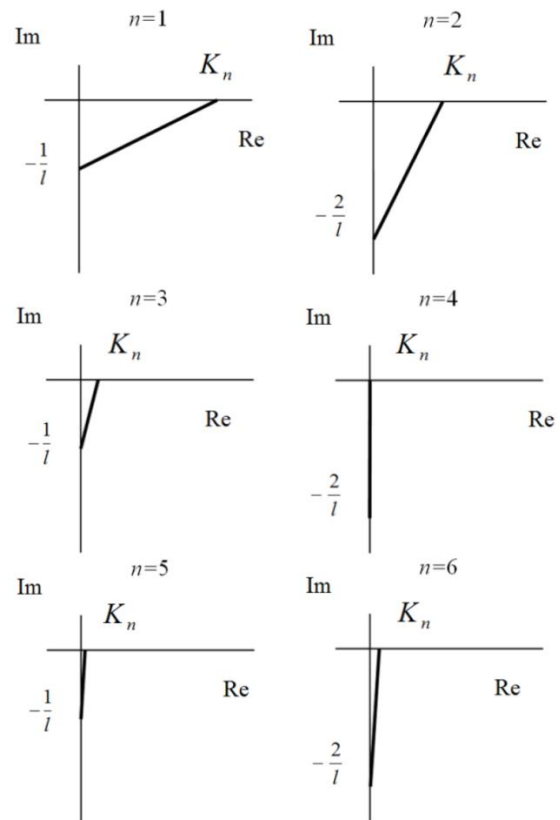


Рис. 6. Модифицированный годограф по каждой гармонике

Представленная система всегда будет абсолютно устойчивой. Для анализа устойчивости предполагается построить годограф линейной части нелинейной системы. В системе (где линейная часть задана) появляется возможность перейти к определению максимального угла сектора, которому должны принадлежать статические характеристики нелинейных элементов систем с абсолютно устойчивым положением равновесия. Необходимо отметить, что, так как сектор нелинейной характеристики ограничен наклоном прямой, то для нелинейных элементов его необходимо определить по нелинейной характеристике.

## VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на достаточно большое количество критериев устойчивости и областей их применения, актуальность исследования новых аспектов их применения остается высокой. Более детальное изучение особенностей известных критериев расширяют области их применения и спектр задач, которые могут быть решены. Например, полученная графическая форма критерия абсолютной устойчивости может быть использована не только для систем, идентичных рассматриваемой, но и для систем с любой сложностью линейной части. Кроме того, важной особенностью является то, что, имея пределы углов расположения нелинейности, можно сохранить точность определения устойчивости даже при неизвестном виде нелинейности. Необходимо отметить, что графическая интерпретация заметно упрощает анализ устойчивости системы, предоставляя возможность зрительно наблюдать положение прямой при разных входных параметрах. В дальнейших исследованиях ставится задача расширить существующий метод анализа абсолютной устойчивости на класс систем с распределёнными параметрами, так как на данный момент проблема решена только для ограниченного набора распределенных систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Arefiev I.B., Afanaseva O.V. Implementation of Control and Forecasting Problems of Human-Machine Complexes on the Basis of Logic-Reflexive Modeling Lecture Notes in Networks and Systems. Int. Conf. Syst. Anal. Eng. Control 2022, 422, 187–197.

[2] Bazhin V.Y., Issa B. Influence of heat treatment on the microstructure of steel coils of a heating tube furnace // J. Min. Inst. 2021, 249, 393–400.

[3] Delgado R, Park J, Choi BW. Open Embedded Real-time Controllers for Industrial Distributed Control Systems. Electronics. 2019; 8(2):223. <https://doi.org/10.3390/electronics8020223>

[4] Filippov G.A., Mishin V.M., Mishin V.V. Effect of the Segregation of Embrittling Impurities on the Local Strength of Grain Boundaries in a Martensitic Steel // Russian Metallurgy (Metally). 2020, Vol. 2020, No. 4, pp. 449–453. DOI:10.1134/S0036029520040072.

[5] Golovina E., Shchelkonogova O. Possibilities of Using the Unitization Model in the Development of Transboundary Groundwater Deposits. // Water 2023, 15, 298.

[6] Ilyushin Y.V. Development of a Process Control System for the Production of High-Paraffin Oil. // Energies. 2022, no. 15 (6462). <https://doi.org/10.3390/en15176462>

[7] Korshunov G.I., Eremeeva A.M., Drebenstedt P. Justification of the use of a vegetal additive to diesel fuel as a method of protecting underground personnel of coal mines from the impact of harmful emissions of diesel-hydraulic locomotives. // Journal of Mining Institute. 2021, no. 247, pp. 39–47. <https://doi.org/10.31897/PMI.2021.1.5>

[8] Krylova E.L., Nemudruk M.L., Fedorov M.S., Novozhilov I.M., Shchurov D.A. The Use of OPC UA technology in the study of computer models of control objects in the educational process. In Proceedings of the X All-Russian Scientific Conference: System Synthesis and Applied Synergetics, Nizhny Arkhyz, Russia, 28 September 2021; pp. 306–310.

[9] Kukharova, T.V.; Ilyushin, Y.V.; Asadulagi, M.-A.M. Investigation of the OA-300M Electrolysis Cell Temperature Field of Metallurgical Production. *Energies* 2022, 15, 9001. <https://doi.org/10.3390/en15239001>

[10] Litvinenko V.S., Petrov E.I., Vasilevskaya D.V., Yakovenko A.V., Naumov I.A., Ratnikov M.A. Assessment of the role of the state in the management of mineral resources. // J. Min. Inst. 2022, 260, 1–17.

[11] Mishin V.M., Filippov G.A., Mishin V.V. Delayed Fracture of Martensitic Steels during Hydrogen Saturation as a Function of the Initial Austenitic Grain Size. // Russian Metallurgy (Metally). 2022, Vol. 2022, No. 4, pp. 430–435.

[12] Pershin I.M., Kukharova T.V., Tsapleva V.V. Designing of Distributed Systems of Hydrolithosphere Processes Parameters Control for the Efficient Extraction of Hydromineral Raw Materials. // J. Phys. Conf. Ser. 2021, 1728, 012017.

[13] Venkatesh Y.V. On Improving Popov's Criterion for Nonlinear Feedback System Stability. Systems Science & Control Engineering. 3. 1-27. 10.1080/21642583.2015.1008153

[14] Zhu Y., Tang S., Wang C., Jiang W., Zhao J., Li G. Absolute Stability Condition Derivation for Position Closed-Loop System in Hydraulic Automatic Gauge Control. Processes 2019, 7, 766. <https://doi.org/10.3390/pr7100766>