

# Применение метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов к модели производящего токсина фитопланктона

М. Д. Поляк, А. А. Щеголева

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения  
markpolyak@gmail.com

**Аннотация.** Модели взаимодействия двух популяций «хищник-жертва» на основе системы уравнений Лотки-Вольтерра широко используются для описания взаимодействия между фитопланктоном и зоопланктоном. Модель производящего токсина фитопланктона дополнительно учитывает влияние токсинов на зоопланктон, таким образом учитывается возможность жертвы уменьшать численность хищника. В работе рассматриваются две новые модели с различными целями для управления, добавляемого в базовую модель производящего токсина фитопланктона. Взаимодействие фитопланктона и зоопланктона описывается функцией Холлинга II-го типа. В список целей для управления моделью входят: достижение популяцией фитопланктона заданного объема, а также достижение пропорциональности (баланса) между популяциями фитопланктона и зоопланктона. Управляющее воздействие для обоих случаев выводится с помощью метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов. В работе приводятся выражения для стационарных точек обеих моделей, а также условия для перехода системы в устойчивое состояние. Формулируются условия сосуществования токсичного фитопланктона и зоопланктона. Результаты валидируются с помощью численных экспериментов.

**Ключевые слова:** хищник-жертва; фитопланктон; зоопланктон; метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов

## I. ВВЕДЕНИЕ

Цветение сине-зеленых водорослей является одной из серьезных экологических проблем, касающихся морской среды, и требует пристального внимания со стороны научного сообщества и общественности [1, 2]. Цветение вызывается стремительным распространением цианобактерий в воде, которое может быть следствием высокой концентрации питательных веществ (азот или фосфор), повышения температуры воды или снижения межвидовой конкуренции между видами планктона [3]. Чтобы предотвратить вред экологии, который приносит цветение, применяются математические модели для прогнозирования времени и объемов цветения. Наиболее известными моделями, описывающими взаимодействие цианобактерий и их естественных хищников, являются модель Лотка-Вольтерра [4], модель питания-фитопланктон-зоопланктон (Nutrition-Phytoplankton-Zooplankton model, NPZ-модель) [5, 6] и модель Базыкина [7]. В статье [8] предлагается другой подход к моделированию цветения. На основе полевых исследований авторы выяснили, что пики цветения и

роста популяции фитопланктона, выделяющего токсина, совпадают. Было высказано предположение, что природа имеет собственные механизмы для борьбы с цветением воды и одним из таких механизмов являются токсины, выделяемые некоторыми группами фитопланктона. Химическое взаимодействие с токсинами приводит к постепенному спаду цветения за счет негативного влияния на рост популяции. Авторы разработали двухкомпонентную модель производящего токсина фитопланктона (Toxin-Producing-Phytoplankton model, TRP-модель), которая описывает взаимодействие токсичного фитопланктона и зоопланктона. Исследование особенностей поведения такой модели может стать основой более сложных моделей, которые могли бы содержать и описание нетоксичных видов фитопланктона.

Чтобы контролировать состояние системы, нами вводится управление в TRP-модель. Под управляющим воздействием будем понимать естественные процессы миграции планктона в водной среде. Количество поступившей биомассы планктона напрямую влияет на изменение популяции токсичного фитопланктона, нужным образом регулируя ее. Рассмотрим несколько целей управления, к которым будет стремиться система. Под целью управления предполагается достижение системой заданных размеров популяций одного или двух видов (в зависимости от формального вида цели).

## II. TRP-МОДЕЛЬ

### A. Описание модели

TRP-модель описывает взаимодействие фитопланктона, продуцирующего токсина, и зоопланктона. В водных объектах, подверженных сильной эвтрофикации, увеличение плотности таксонов сине-зеленых водорослей приводит к их цветению, которое наносит ущерб природной среде и в том числе человечеству. Увеличение же популяции токсичного фитопланктона позволяет контролировать цветение и уменьшать его объемы. TRP-модель (1) стала распространенным решением для моделирования взаимодействия токсичного фитопланктона с зоопланктоном в водных объектах.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - af(x_1)x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta f(x_1)x_2 - \mu x_2 - \theta g(x_1)x_2 \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) переменные  $x_1, x_2$  — плотности популяций токсичного фитопланктона и зоопланктона

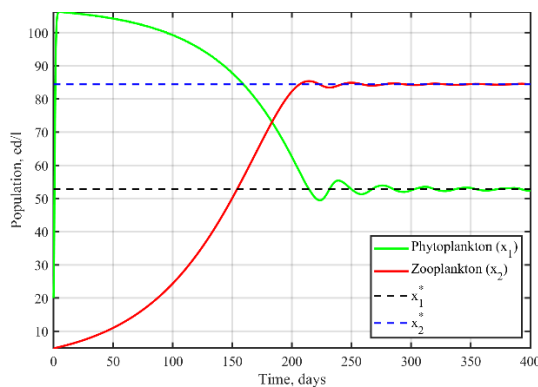
Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-29-00336).

соответственно. Коэффициент  $r$  отражает естественный прирост популяции фитопланктона,  $K$  – максимальная емкость среды,  $\beta$  – коэффициент хищничества,  $\mu$  – коэффициент естественной смертности зоопланктона,  $a, \theta$  – коэффициенты взаимодействия токсичного фитопланктона и зоопланктона,  $\gamma$  – коэффициент полунасыщения в трофической функции. В качестве трофических функций  $f(x_1), g(x_1)$  используется функция Холлинга II-го типа  $f(x_1) = g(x_1) = \frac{x_1}{\gamma + x_1}$ .

### В. Стационарные точки

У системы (1) есть три стационарные точки:

1.  $E_0(0, 0)$
2.  $E_1(K, 0)$
3.  $E_2(x_1^*, x_2^*)$ , где  $x_1^* = \frac{\gamma\mu}{\beta - \mu - \theta}$ ;



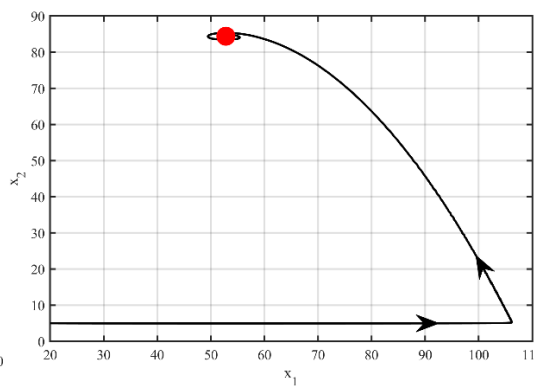
а) Численное решение системы

$$x_2^* = \frac{Kr\beta^2\gamma - \mu r\beta\gamma^2 - 2Kr\beta\gamma\theta - K\mu r\beta\gamma + \mu r\gamma^2\theta + Kr\gamma\theta^2 + K\mu r\gamma\theta}{K\alpha\mu^2 + 2K\alpha\mu\theta - 2K\alpha\beta\mu + K\alpha\theta^2 - 2K\alpha\beta\theta + K\alpha\beta^2}$$

Условия для перехода в точку  $E_2$  (при условии, что все параметры положительные):

$$\begin{cases} \beta > \mu \\ K > \frac{\gamma\mu}{\beta - \mu} \\ \theta < \beta - \mu - \frac{\gamma\mu}{K} \end{cases}$$

Результаты компьютерного моделирования приведены на рис. 1.



б) Фазовый портрет системы

Рис. 1. ТРР-модель  $x_1(0) = 20, x_2(0) = 5, r = 2, K = 108, \alpha = 0.7, \beta = 0.6, \mu = 0.3654, \gamma = 5, \theta = 0.2$

## III. УПРАВЛЕНИЕ

### А. Описание метода управления

Исходная система (1) может быть модифицирована с помощью введения в нее управления. Управление вводится по методике аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), основой которой является идея притягивающих аттракторов динамических систем [9–12]. Метод АКАР можно сформулировать следующим образом: требуется определить такую функцию управления, которая обеспечивает перевод объекта из произвольного начального состояния в окрестности целевого многообразия. Аттрактор можно сформировать с помощью макропеременной  $\psi$  и, решив уравнение Эйлера-Лагранжа (2), найти нужный закон управления.

$$T_k \psi_k' + \phi(\psi_k) = 0 \quad (2)$$

Решение уравнения Эйлера-Лагранжа должно доставлять глобальный минимум функционалу качества:

$$J = \int_0^{\infty} \left[ \phi_k^2(\psi_k) + T_k^2 \psi_k'^2 \right] dt \quad (3)$$

Управление интерпретируется как миграционные процессы планктона, постоянно взаимодействующие с системой и являющиеся внешней силой, которая переводит систему в целевое многообразие.

## IV. ТРР-МОДЕЛЬ С УПРАВЛЕНИЕМ

### А. Цель: достижение заданной численности фитопланктона

Макропеременная (4) формирует ситуацию в экосистеме, при которой популяция фитопланктона достигает заданного целевого значения.

$$\psi(t) = x_1 - x_1^* \quad (4)$$

где  $x_1^*$  – целевое значение популяции фитопланктона.

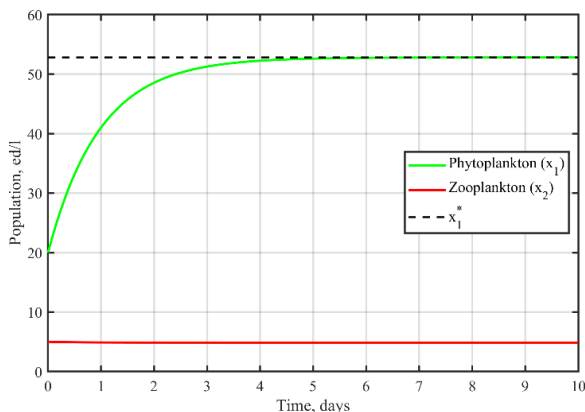
Тогда система с найденным законом управления будет иметь вид (5):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - af(x_1)x_2 + u \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta f(x_1)x_2 - \mu x_2 - \theta g(x_1)x_2 \\ \psi = x_1 - x_1^* \\ u = -\frac{\psi}{T} - rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) + af(x_1)x_2 \\ f(x_1) = g(x_1) = \frac{x_1}{\gamma + x_1} \end{cases} \quad (5)$$

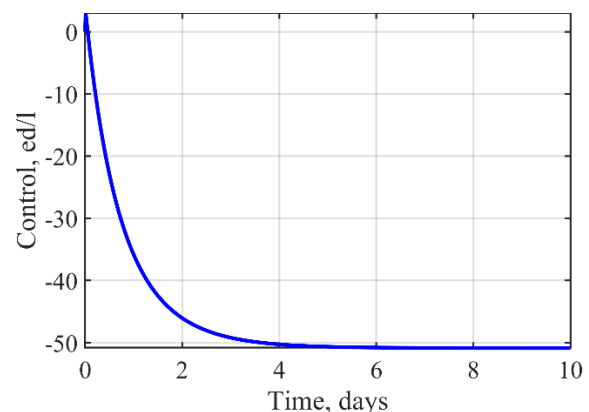
Система (5) может находиться в трех состояниях в зависимости от значения  $x_1^*$ :

1. Устойчивая стационарная точка при  $x_1^* = \frac{\gamma\mu}{\beta - \mu - \theta}$ . На рис. 2 приведено компьютерное моделирование состояния системы для этой стационарной точки.
2. При  $x_1^* < \frac{\gamma\mu}{\beta - \mu - \theta}$  зоопланктон вымирает, в системе остается только фитопланктон.
3. При  $x_1^* > \frac{\gamma\mu}{\beta - \mu - \theta}$  рост популяции зоопланктона принимает экспоненциальный характер.

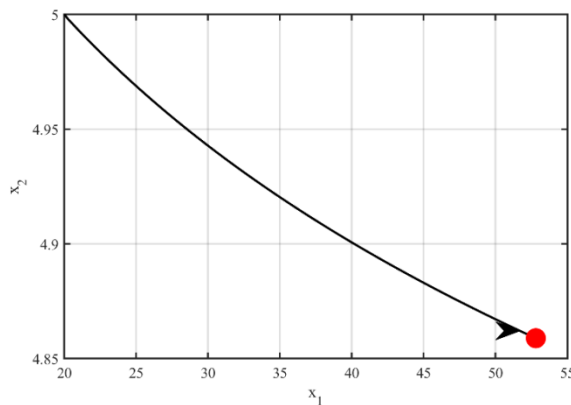
Очевидно, что состояния 2 и 3 не имеют биологического смысла и должны быть проигнорированы. Результаты моделирования системы (5) в состоянии 1 приведены на рис. 2.



а) Численное решение системы



б) Изменение управления



в) Фазовый портрет системы

Рис. 2. ТРР-модель с целью  $\psi(t) = x_1 - x_1^*$ .

$$x_1(0) = 20, x_2(0) = 5, r = 2, K = 108, \alpha = 0.7, \beta = 0.6, \mu = 0.3654, \gamma = 5, \theta = 0.2, x_1^* \approx 52, T = 1$$

### В. Цель: достижение баланса между популяциями

Другим случаем является достижение обеими популяциями пропорциональных друг другу значений. Это позволит емкостью среды, контролируя балансовые соотношения между фитопланктоном и зоопланктоном. Макропеременная примет в этом случае принимает вид (6):

$$\psi(t) = x_1 + \rho x_2 - d \quad (6)$$

где  $\rho, d$  — коэффициент соотношения между популяциями и максимальная суммарная емкость среды соответственно.

Система с управлением для данной цели будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - af(x_1)x_2 + u \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta f(x_1)x_2 - \mu x_2 - \theta g(x_1)x_2 \\ \psi = x_1 + \rho x_2 - d \\ u = -\frac{\psi}{T} - \rho f_2 - rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) + af(x_1)x_2 \\ f(x_1) = g(x_1) = \frac{x_1}{\gamma + x_1} \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) имеет две стационарные точки:

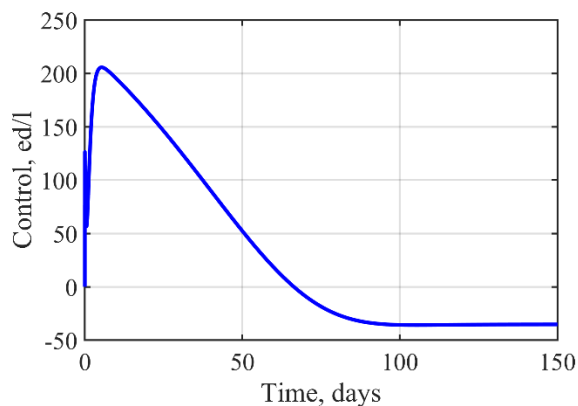
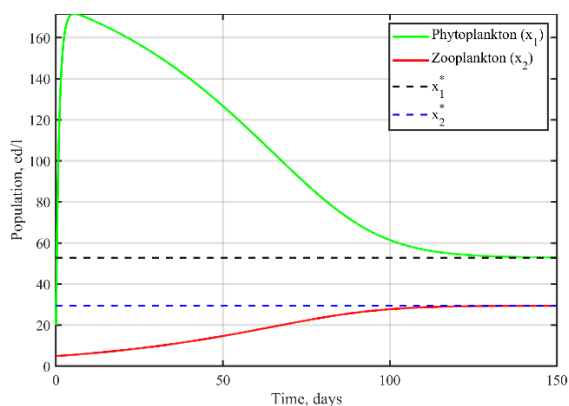
1.  $E_0(x_1^*, x_2^*)$ , где

$$x_1^* = \frac{\gamma\mu}{\beta - \mu - \theta}; \quad x_2^* = \frac{d\mu + \gamma\mu + d\theta - \beta d}{\mu\rho - \beta\rho + \rho\theta}.$$

2.  $E_1(d, 0)$ .

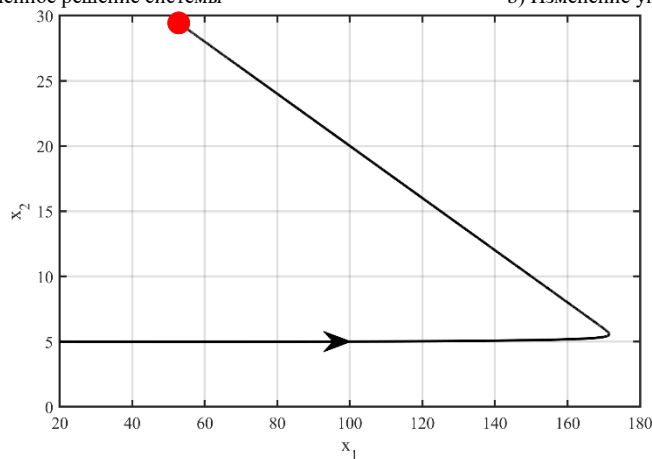
В стационарной точке 2 зоопланктон вымирает, поэтому она не несет существенного биологического интереса. На рис. 3 показаны результаты компьютерного моделирования системы (7) для стационарной точки 1.

Для перехода системы в точку  $E_0$  необходимо выполнения условия  $d > \frac{\gamma\mu}{\beta - \mu - \theta}$ . В случае невыполнения условия система перейдет в точку  $E_1$ .



a) Численное решение системы

b) Изменение управления



c) Фазовый портрет системы

Рис. 3. ТРР-модель с целью  $\psi(t) = x_1 + \rho x_2 - d$ .

$$x_1(0) = 20, x_2(0) = 5, r = 2, K = 108, \alpha = 0.7, \beta = 0.6, \mu = 0.3654, \gamma = 5, \theta = 0.2, \rho = 5, d = 200, T = 1$$

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе ТРР-модели были построены две новые модели с управлением для разных состояний экосистемы. В первой модели управление регулирует численность только одной популяции (токсичного фитопланктона), выживаемость зоопланктона зависит от целевого значения популяции фитопланктона. Выведено равенство, задающее численность фитопланктона, позволяющее сосуществовать в той же среде двум

видам. Также рассмотрены два других случая, при которых зоопланктон вымирает или, наоборот, неограниченно растет.

Управление во второй системе регулирует одновременно обе популяции, стабилизируя таким образом систему. Приведено выражение, позволяющее вычислить минимально допустимую суммарную емкость среды, при которой возможно сосуществование обеих популяций в водоеме.

Результаты численного моделирования подтверждают теоретические предположения о стабильности обеих систем. Приведенные фазовые портреты соответствуют аналитическим выражениям стационарных точек.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K.G. Sellner, G.J. Doucette, and G.J. Kirkpatrick, "Harmful algal blooms: causes, impacts and detection," // *Journal of Industrial Microbiology and Biotechnology*, vol. 30(7), pp. 383–406, 2003.
- [2] I. Sanseverino, D. Conduto, L. Pozzoli, S. Dobricic, T. Lettieri, Algal bloom and its economic impact, European Commission, Joint Research Centre Institute for Environment and Sustainability, Ispra, 2016.
- [3] H W. Paerl, W.S. Gardner, K.E. Havens, "Mitigating cyanobacterial harmful algal blooms in aquatic ecosystems impacted by climate change and anthropogenic nutrients," // *Harmful Algae*, vol. 54, pp. 213–222, 2016.
- [4] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. Москва. Физматлит. 2009. 400 с.
- [5] P.J.S. Franks, "NPZ Models of Plankton Dynamics: Their Construction, Coupling to Physics, and Application" // *Journal of Oceanography*, vol. 58(2), pp. 379–387, 2002.
- [6] M. Asif, S.U. Jan, N. Haider, Q. Al-Mdallal, and T. Abdeljawad, "Numerical modeling of NPZ and SIR models with and without diffusion" // *Results in Physics*, vol. 19, pp. 103512, 2020.
- [7] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М. Наука, 1985. 180 с.
- [8] J. Chattopadhyay, R. R. Sarkar, and S. Mandal, "Toxin-producing Plankton May Act as a Biological Control for Planktonic Blooms—Field Study and Mathematical Modelling," // *Journal of Theoretical Biology*, vol. 215(3), pp. 333–344, 2002.
- [9] Колесников А.А. Синергетика и проблемы теории управления: Сборник статей. Москва, Физматлит, 2004.
- [10] S.I. Kolesnikova, "Synthesis of the Control System for a Second Order Non-Linear Object with an Incomplete Description," // *Autom Remote Control*, vol. 79, pp. 1558–1568, 2018.
- [11] M. Polyak, and S. Kolesnikova, "Novel approach to Design and Analysis of Water Resources Development Model in Terms of Phytoplankton Population Dynamics," *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, vol. 459(3), pp. 032072, 2020.
- [12] A. Shchegoleva, and M. Polyak, "Mathematical modeling of dynamical systems based on Lotka-Volterra model with intraspecific competition" In proceedings of Wave electronics and infocommunication systems – Saint-Petersburg: Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, pp. 140-145, 2022.