Методика метрологического анализа измерительной ситуации, допускающей учет функциональных взаимосвязей между измеряемыми величинами, и примеры ее применения

В. А. Гаранин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
garanin_va@spbstu.ru

Аннотация. **Работа посвящена метрологическому анализу ситуаций совместного измерения значений нескольких искомых величин, для которых существуют и априорно известны такие зависимости между ними, что по крайней мере для одной из измеряемых величин могут быть с их помощью получены одна или более независимые оценки из значений других измеряемых величин. Для расчета пределов возможной погрешности результатов обработки таких совместных измерений, с учетом упомянутых априорных сведений, предложена универсальная методика, позволяющая принять во внимание неопределенности результатов выполненных измерений и параметров уравнений, описывающих известные взаимосвязи. Разработанная методика применима для случаев, когда взаимосвязи между величинами выражены в виде одного или нескольких уравнений. Приведены примеры выполнения метрологического анализа характерных измерительных ситуаций с ее помощью.**

Ключевые слова: метрологический анализ; совместные измерения; оценка погрешностей; согласование результатов измерений; взаимосвязи между измеряемыми величинами

I. Введение

При выполнении совместных измерений значений физических величин возникает возможность осуществить уточнение результатов их математической обработки, если в наличии есть дополнительная априорная информация об измерительной ситуации. Наиболее частым способом формализации такого рода сведений является представление их в виде системы уравнений или неравенств. Указанную процедура перевода дополнительной информации в уточнение конечных результатов математической обработки результатов измерений в литературе принято называть согласованием (неточных) данных [1]. Цель этой операции заключается в получении эффективных в статистическом смысле оценок значений искомых величин на основе результатов их совместного измерения, не противоречащих известной математической модели объекта или процесса, для которых выполнены данные измерения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта №23-29-00694

Как правило, процедура согласования сводится к математической задаче отыскания условного оптимума: введение в задачу обработки результатов совместных измерений дополнительных сведений (математической модели) очерчивает границы множества возможных решений, в пределах которого необходимо найти оптимальное, учитывая погрешности всех данных – как результатов измерений, так и параметров модели.

Для отыскания оценок значений измеряемых величин, получаемых в ходе процедуры согласования, на практике используют как методы аналитической [1, 2], так и численной оптимизации [3-6], общим для которых является построение на принципе максимального правдоподобия и привлечение предположения о том, что случайные погрешности результатов измерений независимы и подчинены нормальному закону.

Обычно метрологический анализ, подразумевающий выполнение расчета погрешностей результатов согласования, на промышленных объектах выполняется двумя способами: до монтирования измерительной системы – с помощью статистического эксперимента, после – в рамках поверочных работ, подразумевающих сравнение результатов с известной мерой или с результатами от образцового средства измерения.

До недавнего времени аналитические методы оценки погрешности результата согласования с использованием сведений о неопределённости исходных данных и параметров учитываемой математической модели были разработаны только для линейных задач [1, 7] в предположении наличия у результатов измерений только несмещенных и некоррелированных случайных погрешностей. В работах [8–12] была предпринята попытка построения универсального подхода к метрологическому анализу результатов согласования совместных измерений для нелинейных задач и при произвольном распределении погрешностей результатов измерений. Данная работа содержит представление обобщенной методики метрологического анализа результатов согласования, основанной на упомянутом подходе и свободной от ограничений, ранее предложенных в литературе методов.

II. Постановка задачи

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ – измеряемые величины, взаимосвязь между которыми известна и формализована в виде системы уравнений $\mathbf{F}_M(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \mathbf{0}_m$, где $\mathbf{F}_M = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ – вектор-функция, $\mathbf{a}^T = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_m^T)$ – вектор параметров математической модели, составленный из векторов параметров для каждой функции, входящей в $\mathbf{F}_M$, $\mathbf{0}_m$ – вектор из m элементов, заполненный нулями.

Обозначим результаты измерений значений x_j, получаемые в ходе совместных измерений, как $\hat{\mathbf{x}}_j = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})^T$, где $\hat{x}_{ji} = x_j + \varepsilon_{ji}$, ε_{ji} – случайные погрешности, имеющие совместное распределение $\Phi(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\theta})$, $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_N)$, $\boldsymbol{\theta}$ – вектор параметров. Согласование этих данных осуществляется поиском такого вектора $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)^T$, что доставляет условный оптимум:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}:\mathbf{F}_M(\mathbf{x},\, \mathbf{A})=\mathbf{0}} r(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\theta}),$$

где целевая функция r в соответствии с принципом максимального правдоподобия определяется из совместного распределения $\Phi(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\theta})$ согласуемых результатов измерений. Обычно для упрощения задачи полагают, что корреляция между значениями элементов $\hat{\mathbf{X}}$ отсутствует либо ею можно пренебречь, что в случае измерительных систем с независимыми измерительными каналами до известной степени является обоснованным.

Пусть измерительная система, используемая для выполнения совместных измерений, прошла калибровку каждого измерительного канала и все систематические погрешности компенсированы. Тогда можно считать, что все значения $\hat{x}_{ji}$ не имеют систематического смещения относительно действительных значений x_j измеряемых величин и искажены только случайной погрешностью. Следовательно, $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\theta}$ и других параметров сдвига в векторе $\boldsymbol{\theta}$ нет.

Обозначим как k_j степень повышения точности результата измерения значения x_j (отложенную в разах), достигаемого за счет согласования результатов прямых измерений $\hat{\mathbf{x}}_j$ с результатами измерений прочих физических величин:

$$k_j^2 = \sigma_{y_j}^2 / \sigma_{x_j^*}^2,$$

где $y_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{ji}$ – средние значения, вычисленные по результатам измерений величин x_j, а σ^2 – дисперсии полученных оценок (указаны в виде нижнего индекса).

Согласно работе [8] в первом приближении значение x_j^* представляет собой средневзвешенное от значения y_j и оценки $\tilde{x}_j$, полученной косвенно из математической модели $\mathbf{F}_M(\mathbf{t}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}_m$, решенной относительно x_j. Здесь $\mathbf{t} = (y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots y_N)^T$.

В силу асимптотической нормальности оценок методом максимального правдоподобия получаем, что

$$x_j^* = \left(\frac{y_j}{\sigma_{y_j}^2} + \frac{\tilde{x}_j}{\sigma_{\tilde{x}_j}^2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_{y_j}^2} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{x}_j}^2}\right).$$

Тогда, так как

$$\sigma_{x_j^*}^2 = \left(\frac{1}{\sigma_{y_j}^2} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{x}_j}^2}\right)^{-1},$$

первое приближение значения k_j при независимом выполнении всех измерений, оказывается равно

$$k_j^2 = 1 + \sigma_{y_j}^2 / \sigma_{\tilde{x}_j}^2. \qquad (1)$$

Величина дисперсии $\sigma_{y_j}^2$ определяется точностью выполнения прямых измерений величины x_j, и может быть рассчитана исходя из условий их проведения. Значение же $\sigma_{\tilde{x}_j}^2$ оценить существенно сложнее, так как оно определяется содержимым ковариационной матрицы для вектора $\mathbf{z} = (\mathbf{t}^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots \mathbf{a}_m^T)$ либо для вектора $\mathbf{t}$, если неопределенностью параметров модели $\mathbf{F}_M$ можно пренебречь. Обычно, полагая, что все измерения выполняются независимо, данную ковариационную матрицу считают диагональной.

При построении универсальной методики вид математической модели $\mathbf{F}_M(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_m$ должен полагаться неизвестным и может быть сколь угодно сложен. В работе [9] авторами для решения этой проблемы предложено использовать метод локальной линеаризации, сводящийся к замене произвольной математической модели, описывающей зависимости между согласуемыми величинами, ее линейным приближением в окрестностях полученных результатов совместного измерения искомых величин $\mathbf{x}$. Переход осуществляется путем усечения ряда Тейлора элементов вектор-функции $\mathbf{F}_M$.

Для случая одного уравнения взаимосвязи ($m = 1$) имеем

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = f_1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}} \cdot \Delta\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{z} = (\mathbf{t}^T, \mathbf{a}_1^T)$, $\Delta\mathbf{z}$ – случайные погрешности элементов вектора $\mathbf{z}$. Так как $|\Delta z_k| \ll |z_k| \ \forall k$, а f_1 – достаточно гладкая функция, то получаем, что

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}} \cdot \Delta\mathbf{z} \approx 0.$$

В силу случайного характера погрешностей, образующих вектор $\Delta\mathbf{z}$, получаем, что дисперсия $\sigma_{\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}} \Delta\mathbf{z}}^2 \approx 0$. В итоге получаем равенство

$$2 \cdot \left(\partial f_1 / \partial x_j\right)^2 \cdot \sigma_{x_j}^2 \approx \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}} \cdot \Sigma_{\mathbf{z}} \cdot (\partial f_1 \backslash \partial \mathbf{z})^T, \qquad (2)$$

из которого определяется искомое среднеквадратическое отклонение $\sigma_{\tilde{x}_j}$. Здесь $\Sigma_{\mathbf{z}}$ – ковариационная матрица вектора $\mathbf{z}$ (полагается диагональной).

Если уравнений несколько (m>1), то $\mathbf{z} = (\mathbf{t}^T, \mathbf{a})$ и имеем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} (\partial f_1 / \partial \mathbf{z}) \cdot \Sigma_{\mathbf{z}} \cdot (\partial f_1 / \partial \mathbf{z})^T \approx 2 \cdot \left(\partial f_1 / \partial x_j\right)^2 \cdot \sigma_{x_j}^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\partial f_m / \partial \mathbf{z}) \cdot \Sigma_{\mathbf{z}} \cdot (\partial f_m / \partial \mathbf{z})^T \approx 2 \cdot \left(\partial f_m / \partial x_j\right)^2 \cdot \sigma_{x_j}^2, \end{cases} \qquad (3)$$

которая в общем случае решается методом наименьших квадратов.

III. Методика расчета погрешностей результатов согласования значений совместно измеренных взаимосвязанных величин

С использованием описанных подходов была разработана методика для предварительного метрологического анализа измерительной ситуации, допускающей учет взаимосвязи между измеряемыми величинами, состоящая из следующих шагов.

1) Формализуем априорную информацию о зависимостях между значениями подлежащих измерению величин в виде системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}_M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}_m,$$

где $\mathbf{F}_M = (f_1, f_2,\dots, f_m)^T$ – вектор-функция, элементы которого являются достаточно гладкими функциями; $\mathbf{a}^T = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T,\dots, \mathbf{a}_m^T)$ – вектор параметров математической модели, составленный из векторов параметров для каждой функции, входящей в $\mathbf{F}_M$; $\mathbf{0}_m$ – вектор-столбец из m элементов, заполненный нулями; вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ содержит подлежащие измерению величины.

2) Если измерительная ситуация предполагает многократное совместное измерение взаимосвязанных величин $\mathbf{x}$, то тогда для каждой из измеряемых величин следует рассчитать оценку ее значения по полученным результатам ее многократных измерений

$$y_j = EV(\hat{\mathbf{x}}_j),\ j = 1, 2, \dots, N,$$

где EV – выбранный алгоритм оценки значения величины x_j по результатам $\hat{\mathbf{x}}_j = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})^T$ ее многократного измерения, n – количество многократных измерений. При однократном измерении ($n = 1$) имеем $y_j = \hat{x}_j$.

3) Оцениваем среднеквадратическое отклонение σ_{y_j} случайной погрешности полученных оценок y_j измерения величин x_j:

- при однократном измерении $\sigma_{y_j} = \sigma_{\hat{x}_j}$,
- если алгоритм EV представляет собой вычисление среднеарифметического, то $\sigma_{y_j} = \sigma_{\hat{x}_j}/\sqrt{n}$.

4) Рассчитываем оценку коэффициента k_j, указывающего на потенциально возможное уточнение за счет процедуры согласования по соотношению

$$k_j^2 = 1 + \sigma_{y_j}^2/\sigma_{\tilde{x}_j}^2,$$

где для случая одного уравнения взаимосвязи ($m = 1$) дисперсия $\sigma_{\tilde{x}_j}^2$ находится из уравнения (2), а для случая системы уравнений $\mathbf{F}_M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}_m$ – из системы уравнений (3).

Для расчетов в данном пункте методики могут быть использованы программы [13, 14].

Если все значения k_j<1,2, $j = 1, 2, \dots, N$, то использование процедуры согласования данных нецелесообразно, поскольку достигаемое уточнение оказывается на уровне ошибок округления, которому традиционно подвергаются метрологические характеристики результатов измерений.

5) Если это необходимо, вычисляем границы интервала I_{k_j} возможных значений коэффициента k_j как

$$I_{k_j} = \left[\min_{q=1,2} k_{j_q}, \max_{q=1,2} k_{j_q}\right],$$

$$k_{j\ 1,2}^2 = 1 + \frac{1}{\sigma_{y_j}^2} \cdot \left(\left(1 \pm \frac{\delta_j}{100\%}\right) \cdot \sigma_{\tilde{x}_j}\right)^2,$$

где δ_j – относительная доля (%) ожидаемой неучтенной нелинейности вектор-функции $\mathbf{F}_M(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ по значению x_j в окрестностях точки $\mathbf{t}$, образованных пределами погрешности ее компонент, т.е. $\mathbf{t} \pm \Delta\mathbf{t}$. В первом приближении мера нелинейности δ_j, %, может быть задана исходя из общих соображений о характере функциональной связи между измеряемыми величинами.

IV. Примеры применения

Пример 1. Рассмотрим следующую измерительную ситуацию. Пусть выполнено $n = 100$ совместных независимых измерений величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, значения которых связаны единственным уравнением $\mathbf{F}_M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (f_1) = (x_1 \cdot a - x_2) = (0)$, где вектор параметров $\mathbf{a} = (a)$. Неопределенность результатов измерений $\hat{x}_{1i}$ и $\hat{x}_{2i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, задана через оценки дисперсий $s_{\hat{x}_1}^2$ и $s_{\hat{x}_2}^2$.

Положим, что выполненное количество измерений достаточно велико, чтобы без возникновения значимой для конечных результатов погрешности использовать в формулах в качестве действительных значений среднеквадратических отклонений σ результатов измерений искомых величин значения их оценок s (при указанном n величина соответствующей статистической погрешности не превышает с доверительной вероятностью 0,95 значения 15%).

Пусть x_1 и x_2 – это величины напряжения на входе и выходе некоторого четырехполюсника, величина a – коэффициент передачи этого четырехполюсника, а погрешности результатов измерения значений величин x_1 и x_2 носят случайный характер и подчинены нормальному закону. В этом случае согласно методу максимального правдоподобия эффективными оценками значений искомых величин x_1 и x_2 будут являться соответствующие среднеарифметические y_1 и y_2 от результатов измерения каждой из них, т.е.

$$y_j = EV(\hat{\mathbf{x}}_j) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{ji},\ j = 1,2.$$

Необходимо определить степень потенциального уточнения результатов измерения искомой величины x_1 за счет учета дополнительной априорной информации о взаимосвязи между x_1 и x_2 в сравнении с результатом $y_1 = EV(\hat{\mathbf{x}}_1)$.

В результате измерительного эксперимента с последующей обработкой полученных результатов прямых измерений по алгоритму EV получены следующие численные значения (при a = 2,00):

y_1 = 2,00 В; y_2 = 4,00 В; $s^2_{y_1}$ = 0,04 В^2; $s^2_{y_2}$ = 0,16 В^2.

Полагая, что функциональная связь между величинами x_1 и x_2 известна точно, запишем для него уравнение (1):

$$(\partial f_1/\,\partial x_1)^2\cdot\sigma^2_{\tilde{x}_1}\approx(\partial f_1/\,\partial x_2)^2\cdot s^2_{y_2}.$$

Отсюда

$$\sigma^2_{\tilde{x}_1}\approx\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2\cdot s^2_{y_2}=\frac{s^2_{y_2}}{a^2}.$$

Оценим степень уточнения k_1 оценки значения величины x_1, достигаемого за счет учета априорной информации о взаимосвязи между x_1 и x_2:

$$k_1=\sqrt{1+\frac{s^2_{y_1}}{\sigma^2_{\tilde{x}_1}}}=\sqrt{1+\frac{s^2_{y_1}\cdot a^2}{s^2_{y_2}}}=\sqrt{1+\frac{0{,}02^2\cdot 2^2}{0{,}04^2}}=\sqrt{2}.$$

Полученное значение обусловлено выполнением равенства $s_{y_1}/\,y_1=s_{y_2}/\,y_2$ в рассмотренном примере и по сути дела соответствует ситуации уменьшения неопределенности при усреднении двух равноточных результатов измерения одной величины.

Пример 2. Пусть выполнено однократное совместное измерение массового расхода вещества в нескольких трубопроводах, сходящихся в один общий канал. Измеряемые величины связаны уравнением:

$$\mathbf{F}_M(\mathbf{x},\varnothing)=(f_1)=\left(x_0-\sum_{j=1}^4 x_j\right)=(0),$$

где x_0 – результат измерения массового расхода вещества в общем трубопроводе, $x_1, \ldots, x_4$ – результаты измерения расхода в остальных трубопроводах.

В ходе измерений получены следующие результаты:

$\hat{x}_0$ = 12,60 (кг/мин); $\hat{x}_1$ = 6,60 (кг/мин); $\hat{x}_2$ = 1,50 (кг/мин); $\hat{x}_3$ = 1,50 (кг/мин); $\hat{x}_4$ = 3,00 (кг/мин).

Априорно известно, что случайная составляющая погрешности результатов измерения расхода для каждого датчика не превышает абсолютных значений:

$\Delta_{\hat{x}_0}$ = 60 (г/мин); $\Delta_{\hat{x}_1}$ = 35 (г/мин); $\Delta_{\hat{x}_2}$ = 8 (г/мин); $\Delta_{\hat{x}_3}$ = 15 (г/мин); $\Delta_{\hat{x}_4}$ = 30 (г/мин),

где Δ обозначает полуширину доверительного интервала одинаковой для всех датчиков вероятностной меры Q = 0,95.

Определим значение k_1 – величины возможного уточнения результата измерения $\hat{x}_1$ массового расхода вещества в первом трубопроводе за счет присутствующей дополнительной информации. Будем полагать, что погрешность модели взаимосвязи между измеряемыми величинами пренебрежимо мала.

Определим предельное значение $\Delta_{\tilde{x}_1}$ через уравнение (1), используя то, что $\Delta_{\tilde{x}_j}/\sigma_{\tilde{x}_j}=\mathrm{const}(j)$, j = 0, 1, …, 4:

$$(\partial f_1/\,\partial x_1)^2\cdot\Delta^2_{\tilde{x}_1}\approx\sum_{j\in\{0,2,3,4\}}\left(\partial f_1/\,\partial x_j\right)^2\cdot\Delta^2_{\tilde{x}_j}.$$

Отсюда получаем, что $\Delta^2_{\tilde{x}_1}\approx$ 75 (г/мин).

Поскольку измерения однократные, то $y_1=\hat{x}_1$ и согласно (1) получаем, что k_1 = 1,21 (раза).

Таким образом, рассмотренная измерительная ситуация допускает уточнение результатов прямого измерения массового расхода в первой трубе до 1,2 раз. Небольшой потенциал уточнения обусловлен относительно высокой неопределенностью результатов выполняемых измерений.

Представленные в данном разделе результаты находятся в хорошем соответствии с результатами расчетов, получаемых при использовании более сложных моделей [15-17] согласования результатов совместных измерений (полу- и полностью непараметрических) для нелинейных задач, характеризующих измерительные ситуации.

V. Заключение

В данной работе предложена методика метрологического анализа измерительной ситуации, допускающей учет функциональных взаимосвязей между измеряемыми величинами для стационарных задач с достаточно гладкими функциями упомянутых взаимосвязей. Представленная методика сочетает в себе вычислительную простоту и достаточную с метрологической точки зрения достоверность получаемых оценок. В работе приведены примеры ее применения для нескольких измерительных ситуаций.

Благодарности

Автор статьи благодарит Семенова Константина Константиновича (СПбПУ) за плодотворные обсуждения и полезные рекомендации.

Список литературы

[1] L.K. Reznik and G.N. Solopchenko, “Use of priori information on functional relations between measured quantities for improving accuracy of measurement,” // Measurement, vol. 3, pp. 98-106, 1985.

[2] M.J. Bagajewicz and E. Cabrera, “Data reconciliation in gas pipeline systems,” // Industrial & engineering chemistry research, vol. 42(22), pp. 5596-5606, 2003.

[3] S. Bai, J. Thibault and D.D. McLean, “Dynamic data reconciliation: Alternative to Kalman filter,” // Journal of Process Control, vol. 16(5), pp. 485-498, 2006.

[4] D.M. Prata, M. Schwaab, E.L. Lima and J.C. Pinto, “Nonlinear dynamic data reconciliation and parameter estimation through particle swarm optimization: Application for an industrial polypropylene reactor,” // Chemical Engineering Science, vol. 64(18), pp. 3953-3967, 2009.

[5] D. Wang and J.A. Romagnoli, “A framework for robust data reconciliation based on a generalized objective function,” // Industrial & engineering chemistry research, vol. 42(13), pp. 3075-3084, 2003.

[6] D. Wang and J.A. Romagnoli, “Robust data reconciliation based on a generalized objective function,” // IFAC Proceedings Volumes, vol. 35(1), pp. 191-196, 2002.

[7] S. Narasimhan and C. Jordache, Data reconciliation and gross error detection: An intelligent use of process data. Houston, Texas: Gulf Publ. Comp., 2000.

[8] V.A. Garanin and K.K. Semenov, “The systematic approach for estimating the potential increase of measurement results accuracy achieved by the use of dependencies between measurands,” // Proc. of the XXIV International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM-2021), pp. 15-18, 2021.

[9] V.A. Garanin and K.K. Semenov, “Measured Data Reconciliation Processed within Nonlinear Constraints Models in Cyber-Physical Systems,” // Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 460, pp. 78-95, 2023.

[10] V.A. Garanin and K.K. Semenov, “Estimating the Accuracy Increase During the Measuring Two Quantities with Linear Dependence,” // Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 95, pp. 235-246, 2020.

[11] V.A. Garanin and K.K. Semenov, “Semi-nonparametric approach for measured data reconciliation based on the Gram-Charlier series expansion,” // Measurement: Sensors, vol. 18, paper 100351, 2021.

[12] V.A. Garanin and K.K. Semenov, “Evaluation of the Potential Refinement of the Results of Multiple Measurements with Asymmetric Distribution, Achieved by Considering the Relationships between the Measurands,” // Proc. of the XXVI International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM-2023), pp. 32-36, 2023.

[13] Свид. о регистрации программы для ЭВМ RU 2023617421 / А.А. Целищева, К.К. Семенов, В.А. Гаранин. Программа для вычисления приближенной оценки погрешности корней нелинейных уравнений с неточными параметрами на основе локальной полиномиальной аппроксимации. Заявка № 2023615897 от 30.03.2023. Опубл. 10.04.2023.

[14] Свид. о регистрации программы для ЭВМ RU 2023617702 / А.А. Целищева, К.К. Семенов, В.А. Гаранин. Программа для вычисления приближенной оценки погрешности решений систем нелинейных уравнений с неточными параметрами на основе локальной полиномиальной аппроксимации. Заявка № 2023615916 от 30.03.2023. Опубл. 12.04.2023.

[15] Свид. о регистрации программы для ЭВМ RU 2023610445 / В.А. Гаранин, К.К. Семенов. Программа для непараметрического согласования результатов совместных измерений взаимосвязанных величин с использованием метода проекционного восстановления плотности распределения вероятностей. Заявка № 2022686089 от 27.12.2022. Опубл 11.01.2023.

[16] Свид. о регистрации программы для ЭВМ RU 2023610961 / В.А. Гаранин, К.К. Семенов. Программа для оценки повышения точности измерений за счет учета известных функциональных взаимосвязей между измеряемыми величинами. Заявка № 2022686101 от 27.12.2022. Опубл. 16.01.2023.

[17] Свид. о регистрации программы для ЭВМ RU 2023611165 / В.А. Гаранин. Программа для непараметрического согласования результатов совместных измерений взаимосвязанных величин с использованием метода ядерного восстановления плотности распределения вероятностей. Заявка № 2022686069 от 27.12.2022. Опубл. 17.01.2023.