Исчисление дискретных рисков в условиях вероятностной неопределенности

Т. А. Уразаева

*Поволжский государственный технологический университет,
Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола*

urazaevata@volgatech.net

Аннотация. **Предложена модель исчисления абстрактных рисков эволюции систем произвольной природы с дискретным множеством состояний в условиях вероятностной неопределенности. Выявлены алгебраические структуры, возникающие на универсальном множестве абстрактных рисков и их частей. Сформулирован аналог полиномиальной теоремы на этом множестве, имеющей место при условии коммутативности эволюционных преобразований состояния системы. Предложен ряд естественных конгруэнций на универсальном множестве абстрактных рисков и их частей, позволяющих также повысить эффективность вычислений на практике.**

Ключевые слова: алгебраическая теория риска; вероятностная неопределенность; мультимножество; полиномиальная теорема; риск; система; эволюция

I. Введение

Любая система (техническая, социально-экономическая и т. п.) подвержена эволюции. Это означает, что система, находясь в начальный момент времени t_0 в состоянии $s(t_0)$, под действием решения субъекта принятия решения (СПР), если он существует, δ, и с учетом состояния внешней среды ω_0, в некоторый следующий момент времени t_1 окажется в состоянии $s(t_1) = H(t_1, s(t_0), [\delta,]\, \omega_0)$, где H – «историческое» отображение. При этом спектр возможных состояний при фиксированном решении СПР δ определяется множеством возможных состояний природы $\omega_0 \in \Omega_0$. В качестве модели природы мы будем использовать вероятностное пространство (Ω_0, A_0, P_0), где Ω_0 – множество состояний природы, A_0 – σ-алгебра подмножеств множества Ω_0, P_0 – вероятностная мера на измеримом пространстве (Ω_0, A_0). Также будем предполагать, что каррированная функция $H(t_1, s(t_0), [\delta,])$ измерима на (Ω_0, A_0). В этом случае можно говорить о риске развития системы в условиях вероятностной неопределенности, если на множестве состояний $\{H(t_1, s(t_0), [\delta,])(\omega_0) : \omega_0 \in \Omega_0\}$ задан порядок предпочтения, минимально образующий полурешетку [9].

Обычно переход от состояния $s(t_0)$ к состоянию $s(t_1)$ происходит как череда преобразований состояния системы: $H(t_1, s(t_0), [\delta,]\, \omega_0) = c_k \circ c_{k-1} \circ \ldots \circ c_1(s(t_0))$, где каждое преобразование состояния c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, может быть связано как с многошаговым воздействием решения СПР, с многошаговым влиянием внешней среды, так и с преобразованиями, связанными с процессами в различных подсистемах рассматриваемой системы. При этом каждое преобразование состояния системы может моделироваться своим вероятностным пространством. В случае, если эти вероятностные пространства конечны, задача исчисления риска развития системы оказывается в ряде случаев доступной для реализации на современных компьютерах.

II. Описание модели исчисления

Пусть S – множество всех возможных состояний системы. Будем рассматривать подмножество $C \subset S^S$ всех отображений множества состояний на себя, таких, которые коммутативны относительно композиции. В этом случае можно показать, что система $\langle C, \circ \rangle$ образует коммутативный моноид [4].

Введем понятие проекции прямого произведения двух множеств $A \times B$ на первый и второй сомножители:

$$\mathrm{pr}_A : A \times B \to A,\ \mathrm{pr}_B : A \times B \to B$$

через сопоставления следующего вида:

$$\mathrm{pr}_A : (x, y) \mapsto x,\ \mathrm{pr}_B : (x, y) \mapsto y.$$

Пусть $\mathbf{I} = [0, 1] \subset \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел. Пользуясь понятием проекций, определим на множестве $C \times \mathbf{I}$ операцию умножения следующим образом:

$$z = x \cdot y \underset{Def}{\Leftrightarrow} \mathrm{pr}_C\, z = \mathrm{pr}_C\, y \circ \mathrm{pr}_C\, x,\ \mathrm{pr}_{\mathbf{I}}\, z = \mathrm{pr}_{\mathbf{I}}\, x \cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{I}}\, y.$$

Заметим, что система $\langle C \times \mathbf{I}, \cdot \rangle$ тоже образует коммутативный моноид.

Введем, далее, множество мультимножеств вида:

$$\mathcal{A} = \{ \mathbf{A} : \operatorname{Supp} \mathbf{A} \subset C \times \mathbf{I} \}$$

и операции сложения и умножения на нем:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \underset{Def}{=} \left\{ k_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}(u) * u:\ k_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}(u)=k_{\boldsymbol{A}}(u)+k_{\boldsymbol{B}}(u),\right.$$

$$\left. u \in \operatorname{Supp}\boldsymbol{A} \cup \operatorname{Supp}\boldsymbol{B} \right\},$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \underset{Def}{=} \left\{ k_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}(u) * u : k_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}(u) = \sum_{\substack{x\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{A},\\ y\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{B},\\ xy=u}} k_{\boldsymbol{A}}(x)\, k_{\boldsymbol{B}}(y),\right.$$

$$\left. u \in \bigcup_{\substack{x\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{A},\\ y\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{B}}} \{xy\} \right\}.$$

С основными идеями и обозначениями теории мультимножеств можно познакомиться в фундаментальной работе А. Б. Петровского [5].

Можно показать, что алгебра $\langle \mathcal{A}, +, \cdot \rangle$ является коммутативным полукольцом с единицей [11].

Из множества $\mathcal{A}$ естественным образом можно выделить два подмножества $\mathcal{R} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{A}$:

1) множество рисков:

$$\mathcal{R} \underset{Def}{=} \left\{ \boldsymbol{R}:\ \boldsymbol{R}\in\mathcal{A}, \Sigma_{x\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{R}}\, k_{\boldsymbol{R}}(x)\, \mathrm{pr}_{\mathbf{I}}\, x = 1 \right\},$$

2) множество рисков и их частей:

$$\mathcal{P} \underset{Def}{=} \left\{ \boldsymbol{R}:\ \boldsymbol{R}\in\mathcal{A}, \Sigma_{x\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{R}}\, k_{\boldsymbol{R}}(x)\, \mathrm{pr}_{\mathbf{I}}\, x \le 1 \right\}.$$

Множество рисков содержит, таким образом, полные группы событий (мультимножества, элементы которых являются парами «преобразование системы – вероятность этого преобразования», при этом сумма вероятностей всех элементов дает 1). Операция умножения на этом множестве фактически означает вычисление совместного риска из двух рисков, представленных сомножителями, при условии их независимости.

Множество рисков и их частей, соответственно, содержит не только полные группы событий, но и всевозможные их разбиения.

Нетрудно проверить, что алгебры $\langle \mathcal{R}, \cdot \rangle$ и $\langle \mathcal{P}, \cdot \rangle$ представляют из себя также коммутативные моноиды. Кроме того на множестве $\mathcal{P}$ действует частичная операция сложения. Эту операцию следует понимать, как операцию агрегации риска на любых подмножествах разбиений любого абстрактного риска.

Подводя итог данного раздела, можно определить алгебраическую систему, представляющую универсальное множество абстрактных рисков и их частей в условиях вероятностной неопределенности, как моноид (относительно операции вычисления совместного риска), вложенный в коммутативное полукольцо с единицей, на котором (моноиде) определена частичная операция (полукольцевая) сложения (агрегации риска). Данный вывод демонстрирует фундаментальную алгебраическую природу риска, по крайней мере в условиях вероятностной неопределенности.

III. Аналог полиномиальной теоремы

Для элементов коммутативного моноида как частного случая полугруппы определена натуральная степень [4]. Интерпретацией, например, n-й степени некоторого абстрактного риска развития системы является результирующий риск n независимых проявлений исходного риска в системе (n подсистем, n последовательных периодов эволюции системы в условиях, когда известен риск одного периода, и т. п.).

Можно доказать следующую весьма полезную для практики теорему.

Теорема. Пусть $m = |\operatorname{Supp}\boldsymbol{A}|$. Занумеруем элементы носителя мультимножества $\boldsymbol{A}$: $\mathrm{B}_{i=1}^{m}\{x_i\} = \operatorname{Supp}\boldsymbol{A}$. Пусть, далее, определены предикаты:

$$\pi_1[n](l_1, l_2, \ldots, l_m) = \left(l_i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \Sigma_{i=1}^{m} l_i = n\right),$$

$$p_2[\boldsymbol{A}, n, w](l_1, l_2, \mathrm{K}\ , l_m) = \left(p_1[n](l_1, l_2, \mathrm{K}\ , l_m), \mathrm{B}_{i=1}^{m}\{x_i\} = \operatorname{Supp}\boldsymbol{A}, \mathrm{P}_{i=1}^{m} x_i^{l_i} = w\right)$$

И

Тогда

$$\boldsymbol{A}^n = \left\{ k_{\boldsymbol{A}^n}(w) * w:\ k_{\boldsymbol{A}^n}(w) = \sum_{\pi_2[\boldsymbol{A}, n, w](l_1, l_2, \ldots, l_m)} \frac{n!}{\Pi_{i=1}^{m} l_i!} \Pi_{i=1}^{m} \left[k_{\boldsymbol{A}}(x_i)\right]^{l_i},\right.$$

$$\left. w \mathrm{O} \bigcup_{p_1[n](l_1, l_2, \mathrm{K}\ , l_m)} \left\{\mathrm{P}_{i=1}^{m} x_i^{l_i}\right\}, \mathrm{B}_{i=1}^{m}\{x_i\} = \operatorname{Supp}\boldsymbol{A}, m = |\operatorname{Supp}\boldsymbol{A}| \right\}$$

для любого $\boldsymbol{A}\,\mathrm{O}\,\mathcal{A}$.

Приведенная теорема является прямым аналогом классической полиномиальной теоремы, переформулированной для мультимножеств и введенной выше операции их умножения [3].

Практическая ценность этой теоремы заключается в том, что, если вычислять степень посредством последовательного умножения, то такой алгоритм вычисления степени может быть отнесен к классу сложности $\mathbf{EXPTIME} \cap \mathbf{EXPSPACE}$, в то время как алгоритм, основанный на применении приведенной теоремы, относится к классу сложности $\mathbf{PSPACE} \setminus \mathbf{NL}$.

Напомним [10], что класс сложности $\mathbf{EXPTIME}$ – это множество задач, решаемых детерминированной машиной Тьюринга за время $O\left(2^{p'(n)}\right)$, а $\mathbf{EXPSPACE}$ – это множество задач, для решения которых детерминированной машине Тьюринга понадобится память порядка $O\left(2^{p''(n)}\right)$. Здесь p' и p'' – полиномиальные функции. Класс сложности $\mathbf{PSPACE}$ – это множество задач, которые могут быть решены машиной Тьюринга с полиномиальным ограничением пространства, а $\mathbf{NL}$ – это множество простых задач, решаемых недетерминированной машиной Тьюринга с использованием $O(\log n)$ памяти.

IV. Арифметика вычетов

На универсальном множестве рисков и их частей можно определить ряд конгруэнций, имеющих конкретный прикладной смысл. Соответственно можно определить ряд вычетов, использование которых способно повысить эффективность вычислений.

Введем в рассмотрение две функции:

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{R}) \underset{Def}{=} \left\{ \left(\sum_{\substack{x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R}, \\ \operatorname{pr}_C x = c}} k_{\boldsymbol{R}}(x) \operatorname{pr}_{\mathbf{I}} x \right) * c : c \in \bigcup_{x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R}} \left\{ \operatorname{pr}_C x \right\} \right\},$$

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{R}) \underset{Def}{=} \left\{ k_{\boldsymbol{R}}(x) * x : \operatorname{pr}_{\mathbf{I}} x > 0, x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R} \right\},$$

где $\boldsymbol{R} \in \mathcal{P}$.

Можно показать, что на универсальном множестве рисков и их частей возможно введение трех вычетов:

1) наименьший (простейший) вычет: $|\boldsymbol{R}|_k \underset{Def}{=} \mathcal{K}(\boldsymbol{R})$,

2) значимый вычет: $|\boldsymbol{R}|_s \underset{Def}{=} \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$,

3) наименьший значимый вычет: $|\boldsymbol{R}|_{ks} \underset{Def}{=} \mathcal{S} \circ \mathcal{K}(\boldsymbol{R})$,

где $\boldsymbol{R} \in \mathcal{P}$.

Наименьший (простейший) вычет представляет собой отображение, которое сопоставляет произвольному абстрактному риску или его части (мультимножеству) мультимножество, все компоненты которого характеризуются единичной кратностью, и которые получены сбором компонент исходного мультимножества с одинаковыми преобразованиями системы и вероятностью, равной сумме соответствующих кратностей и вероятностей, иначе, суммарной вероятности всех исходов с данным преобразованием состояния системы.

Значимый вычет представляет собой отображение, которое сопоставляет произвольному абстрактному риску или его части (мультимножеству) мультимножество, все компоненты которого характеризуются ненулевой вероятностью.

Наименьший значимый вычет реализует отображение, являющееся композицией двух ранее рассмотренных отображений. (Можно доказать коммутативность композиции в данном случае.)

Для перечисленных вычетов можно показать выполнение следующих свойств:

$$\left| |\boldsymbol{A}|_k + \boldsymbol{B} \right|_k = \left| \boldsymbol{A} + |\boldsymbol{B}|_k \right|_k = \left| |\boldsymbol{A}|_k + |\boldsymbol{B}|_k \right|_k = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|_k,$$

$$\left| |\boldsymbol{A}|_k \cdot \boldsymbol{B} \right|_k = \left| \boldsymbol{A} \cdot |\boldsymbol{B}|_k \right|_k = \left| |\boldsymbol{A}|_k \cdot |\boldsymbol{B}|_k \right|_k = |\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}|_k,$$

$$\left| |\boldsymbol{A}|_s + \boldsymbol{B} \right|_s = \left| \boldsymbol{A} + |\boldsymbol{B}|_s \right|_s = |\boldsymbol{A}|_s + |\boldsymbol{B}|_s = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|_s,$$

$$\left| |\boldsymbol{A}|_s \cdot \boldsymbol{B} \right|_s = \left| \boldsymbol{A} \cdot |\boldsymbol{B}|_s \right|_s = |\boldsymbol{A}|_s \cdot |\boldsymbol{B}|_s = |\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}|_s,$$

$$\left| |\boldsymbol{A}|_{ks} + \boldsymbol{B} \right|_{ks} = \left| \boldsymbol{A} + |\boldsymbol{B}|_{ks} \right|_{ks} = \left| |\boldsymbol{A}|_{ks} + |\boldsymbol{B}|_{ks} \right|_{ks} = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|_{ks},$$

$$\left| |\boldsymbol{A}|_{ks} \cdot \boldsymbol{B} \right|_{ks} = \left| \boldsymbol{A} \cdot |\boldsymbol{B}|_{ks} \right|_{ks} = \left| |\boldsymbol{A}|_{ks} \cdot |\boldsymbol{B}|_{ks} \right|_{ks} = |\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}|_{ks},$$

где $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{P}$, или $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{A}$.

Использование системы описанных вычетов с учетом перечисленных их свойств позволяет на практике в некоторых случаях существенно снизить объем вычислений при анализе и оценке риска эволюции систем.

V. Обсуждение результатов

Представленные в докладе результаты позволяют говорить о создании основ исчисления (абстрактных) дискретных рисков в условиях вероятностной неопределенности. Отметим, что доказательство всех алгебраических фактов, приведенных в докладе, представлено в монографии автора [6]. Также необходимо отметить, что разработан прототип пакета прикладных программ, реализующий примитивы работы с рисками в представленном контексте [7, 8].

Отметим, что использование результатов, представленных в данном докладе, например, позволило повысить точность оценки меры риска «Value-at-Risk» для розничных кредитных портфелей, по отношению к классическому параметрическому методу [6]. При этом в рамках пакета прикладных программ «МультиМИР» версии 1.0 для 4-сценарной модели кредитного договора удается осуществить прямой расчет риска для однородного портфеля, включающего до порядка 500 договоров. Такого рода расчет доступен на обычном персональном компьютере.

Также отметим, что прототип пакета прикладных программ «МультиМИР» версии 1.0 был с успехом использован при разработке информационной системы поддержки принятия решений по управлению персоналом розничной подсистемы коммерческого банка [1], а также при технико-экономическом обосновании варианта резервирования сетевой компоненты отказоустойчивой масштабируемой вычислительной системы специального назначения [2].

VI. Заключение

Предложенный Вашему вниманию доклад представляет собой последовательное изложение результатов по обоснованию создания нового направления исследований, а именно Исчисления дискретных рисков в условиях вероятностной неопределенности. В качестве будущих направлений исследований в контексте исчисления дискретных рисков можно рассматривать проблему факторизации рисков, проблему оценки сложности риска, и другие связанные задачи.

Благодарность

Хочу выразить благодарность коллективу кафедры Информатики и системного программирования Поволжского государственного технологического университета за конструктивное и плодотворное обсуждение как теоретических аспектов развития общей алгебраической теории риска, так и вопросов практической реализации и оптимизации ряда алгоритмов, представленных в пакете прикладных программ «МультиМИР» версии 1.0.

Список литературы

[1] Бородин А.В. Архитектура информационной системы поддержки принятия решений по управлению персоналом розничной подсистемы коммерческого банка // Программные системы и вычислительные методы. 2014. № 2. С. 174-190.

[2] Бородин А.В. Технико-экономическое обоснование варианта резервирования сетевой компоненты отказоустойчивой масштабируемой вычислительной системы специального назначения // Кибернетика и программирование. 2015. № 6. С. 55-70.

[3] Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2006. 400 с.

[4] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972. 285 с.

[5] Петровский А.Б. Пространства множеств и мультимножеств. М.: Едиториал УРСС, 2003. 248 с.

[6] Уразаева Т.А. Алгебраические методы анализа риска в развивающихся экономиках. Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2017. 276 с.

[7] Уразаева Т.А. О функциональности пакета прикладных программ «МультиМИР» // Современные проблемы и перспективы социально-экономического развития предприятий, отраслей, регионов. Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2014. С. 261-265.

[8] Уразаева Т.А. Программный комплекс «МультиМИР», версия 1.0. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RUS 2014614663. Заявка № 2014610697 от 31.01.2014.

[9] Уразаева Т.А. Реляционная теория риска и ее приложения к теоретико-игровым задачам нечисловой экономики // Статистика и Экономика. 2021. Т. 18. № 2. С. 12-21.

[10] Arora S., Barak B. Computational Complexity: A Modern Approach. New York: Cambridge University Press, 2009. 594 p.

[11] Golan J.S. Semirings and their Applications. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. 381 p.