

# Синергетическое управление трёхосным карданным подвесом на подвижном основании

И. Р. Гогорев

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

ilmirgogorev@yandex.ru

П. В. Соколов

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

pvsokolov@etu.ru

**Аннотация.** Карданов подвес является составной частью многих современных технических комплексов в которых необходимо обеспечить неподвижность рабочего тела или другого устройства относительно некоторого пространственного положения или осуществлять вращение по сложной пространственной траектории. При этом управление карданным подвесом в условиях подвижного основания является нетривиальной задачей, так как помимо нелинейности самого объекта и наличия разного рода неопределённостей необходимо учитывать нерегулярный характер движения основания, которое в общем случае описывается случайными процессами. Задача управления нелинейным объектом в условиях неопределённости в параметрах объекта и возмущающих воздействий в настоящий момент довольно успешно решается методами адаптивного управления. Однако классические подходы, основанные на параметризации и “непосредственной компенсации”, плохо подходят для работы со случайными воздействиями, так как требуют строгого аналитического описания. Решение видится в применении к данной задаче метода управления на многообразиях, который в отечественной литературе носит название синергетического управления. Данная работа посвящена проверке применимости синергетического управления к задаче стабилизации трёхосного карданного подвеса на подвижном основании.

**Ключевые слова:** карданов подвес; нелинейное управление; инвариантное множество

## I. ВВЕДЕНИЕ

Для многих классических методов адаптивного управления в случае работы со сложным неопределённым внешним возмущением необходимо иметь определённый набор данных о его модели [1]. В случае, например, применения параметризации, необходима детерминированная модель возмущения, которая обычно задается в виде линейного генератора. В случае же случайных возмущений, такое описание построить невозможно, так как невозможно конечным набором детерминированных переменных описать случайный процесс в силу характеристик спектра последнего. При использовании методов непосредственной компенсации необходимо знание о размахе значений внешнего возмущения для построения энергетически избыточного управления, чтобы гарантировать, что энергии управления хватит для перекрытия энергии возмущения. Для случайного возмущения невозможно говорить о чёткой границе, а лишь о вероятности нахождения сигнала в некоторых пределах. В данной работе будет продемонстрировано

применение метода синергетического управления, которое позволяет стабилизировать сложный многосвязный нелинейный объект управления при случайном возмущении, когда имеются знания о его ограниченности.

## II. МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА

### A. Модель подвеса

Для вывода модели принимается несколько допущений.

- Рассматривается только стабилизация угловых движений на качке.
- Предполагается, что все кольца карданова подвеса симметричны и сбалансированы, и их оси инерции совпадают с осями связанных с ними системами координат. Также предполагается, что момент инерции каждого тела по его оси вращения много больше моментов инерции по вспомогательным осям из-за чего последними можно пренебречь.
- Все моменты инерции, скорости и ускорения приведены к общему началу координат, в качестве которого взят центр тяжести внешнего кольца.

Предполагается также, что в каждом кольце подвеса установлен волоконно-оптический гироскоп для измерения угловой скорости ошибки стабилизации, а за вращение осей отвечают синхронные двигатели на постоянных магнитах.

Для осей примем стандартные обозначения:  $q$  – внешняя ось (ось горизонтального наведения),  $\rho$  – средняя ось (ось вертикального наведения),  $h$  – внутренняя ось (ось поперечного наведения). Также обозначены углы вращения вокруг всех осей карданова подвеса соответствующими буквами: угол  $q$ , угол  $\rho$ , угол  $h$ .

Модель создана с использованием методики, аналогичной той, которая описана в работе [2]. В данном подходе уравнения динамики выводятся с помощью уравнений Лагранжа 1-го рода.

Кинетическая энергия кольца будет выражаться рекуррентной формулой:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (v_{ci}^T v_{ci}) + m_i \omega_i^T R_{ci} A_{i-1,i} v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T J_{ci} \omega_i \quad (1)$$

где  $T_i$  – кинетическая энергия  $i$ -го кольца,  $m_i$  – масса  $i$ -го кольца,  $v_{ci}$  – вектор линейной скорости  $i$ -го кольца,  $\omega_i$  – вектор угловой скорости  $i$ -го кольца,  $J_{ci}$  – момент инерции  $i$ -го кольца,  $R_{ci}$  – матрица координат центра масс  $i$ -го кольца,  $A_{i-1,i}$  – матрица перехода системы координат, связанной с  $i-1$  кольцом в систему, связанной с  $i$ -ым кольцом. При этом  $i = q, \rho, h$ . Для самого внешнего кольца в качестве внешней системы нужно брать систему, связанную с кораблём.

Потенциальная энергия каждого кольца выражается следующими формулами:

$$P_q = m_q g \left( z + \bar{k} A_{o1}^{-1} \left( \bar{z}_{oq} + A_{2q}^{-1} \bar{z}_{cq} \right) \right) \quad (2)$$

$$P_\rho = m_\rho g \left( z + \bar{k} A_{o1}^{-1} \left( \bar{z}_{o\rho} + A_{2q}^{-1} \left( \bar{z}_{o\rho} + A_{q\rho}^{-1} \bar{z}_{c\rho} \right) \right) \right) \quad (3)$$

$$P_h = m_h g \left( z + \bar{k} A_{o1}^{-1} \left( \bar{z}_{oq} + A_{2q}^{-1} \left( \bar{z}_{o\rho} + A_{q\rho}^{-1} \left( \bar{z}_{oh} + A_{\rho h}^{-1} \bar{z}_{ch} \right) \right) \right) \right) \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $z$  – вертикальное перемещение точки центра тяжести основания от её статического положения равновесия, вектор  $\bar{k} = [0 \ 0 \ 1]$ , вектора  $\bar{z}_{ci}$  – координаты центра масс  $i$ -го кольца в собственных осях, вектора  $\bar{z}_{oi}$  – координаты начала системы  $i$ -го кольца в системе  $(i-1)$ -го кольца.

Уравнения динамики объекта задаются с помощью уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial P}{\partial q_i}, i = q, \rho, h \quad (5)$$

где  $q_i$  – независимые обобщённые координаты,  $\dot{q}_i$  – независимые обобщённые скорости,  $T = T(q, \dot{q})$  –

сумма кинетических энергий всех колец,  $P = P(q)$  – сумма потенциальных энергий всех колец,  $Q_i$  – обобщённые силы и моменты, не выводимые из потенциальной энергии. В них входят моменты и силы, создаваемые приводом, а также моменты возмущений. С учётом принятых допущений сила тяжести не действует на систему, следовательно, слагаемое в правой части с потенциальной энергией можно приравнять нулю.

Уравнения динамики можно записать в форме:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(Q - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \quad (6)$$

где  $M(q)$  – матрица инерции,  $C(q, \dot{q})$  – матрица кориолисовых и центробежных сил,  $G(q)$  – матрица потенциальных сил, которая в нашем случае равна нулевой.

### В. Модель возмущений

К возмущениям, действующим на систему, относятся момент трения в осях приводов. В качестве модели момента трения берётся упрощённая модель в виде релейной характеристики:

$$M_{mp} = M_{mp,max} \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (7)$$

где  $M_{mp,max}$  – максимальный момент трения,  $\dot{\theta}$  – относительная угловая скорость соответствующей оси. При этом относительная скорость рассчитывается как разница скорости вращения привода и проекции скоростей качек на ось привода. При этом сама качка моделируется как марковский случайный процесс, получаемый с выхода формирующего фильтра[3]:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gw(t) \quad (8)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha^2 + \beta^2) & -2\alpha \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sigma\sqrt{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$w(t)$  – центрированный белый шум с единичной матрицей интенсивности. В данных уравнениях  $x(1)$  описывается угол качки, а  $x(2)$  его скорость. При этом начальное состояние фильтра определяется как:

$$x(0) = \sqrt{P(0)} * \text{normrnd}(0,1) \quad (11)$$

$$P(0) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 / (\alpha^2 + \beta^2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

### С. Модель системы

При введении замены координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= \dot{q} \end{aligned}, \quad (13)$$

можно из исходных уравнений (4) получить систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(x_1)u - f_1(x_1)M - f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (14)$$

где  $u$  – управление,  $M$  – возмущение, зависящее от относительной скорости. Расширим модель уравнениями возмущения. Будем предполагать, что качка действует непосредственно на оси стабилизатора для избегания дополнительных нелинейных преобразований координат. Обозначив  $g_1$  как угол качки, а  $g_2$  – её скорость, уравнения (7)-(14) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(x_1)u - kf_1(x_1)\text{sign}(x_2 - g_2) - f_2(x_1, x_2) \\ \dot{g}_1 &= g_2 \\ \dot{g}_2 &= a_1g_1 + a_2g_2 + b_1w \end{aligned} \quad (15)$$

При этом каждая переменная состояния является вектором из трёх элементов отражающих динамику и возмущения каждой из осей.

### III. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА

Аналогично [4] для систем с неопределённым возмущением по типу (15) проводится следующая процедура синтеза по АКАР. Сначала производится замена координат, и записываются в систему уравнения ошибок:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - g_1 \\ e_2 &= x_2 - g_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Благодаря новым координатам, мы можем сформулировать задачу стабилизации на качке, как стабилизации значения  $e_{10} = 0$ . Также как в работе [4], вводятся переменные  $z_1$  и  $z_2$ , как оценки компонент неизвестного возмущения. Таким образом, система приводится к виду:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= f_1(e_1 + z_1)u - kf_1(e_1 + z_1)\text{sign}(e_2) - f_2(e_1 + z_1, e_2 + z_2) \quad (17) \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\xi e_1 \end{aligned}$$

Зададим макропеременную:

$$\psi_1 = e_2 + \varphi(e_1, z_1, z_2) \quad (18)$$

Её полная производная в силу уравнения (18):

$$\dot{\psi}_1 = \dot{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f_1 u - kf_1 \text{sign}(e_2) - f_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (19)$$

Аргументы были опущены для компактной записи. Основное функциональное уравнение метода АКАР формируется в виде:

$$T_1 \dot{\psi}_1 + \psi_1 = 0 \quad (20)$$

Оно будет устойчиво при любом  $T_1 > 0$ . Подставляя (18) и (19) в (20) выражается закон управления:

$$u = k \cdot \text{sign}(e_2) + \frac{f_2}{f_1} - \frac{1}{f_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{f_1 T_1} e_2 - \frac{1}{f_1 T_1} \varphi \quad (21)$$

Данное управление осуществляет попадание изображающей точки на многообразие  $\psi_1 = 0$ , а также обеспечивает сжатие фазового пространства. В дальнейшем можно рассматривать динамику декомпозированной системы, путём отбрасывания уравнения переменных, в правых частях которых стоит управление (21) и осуществляя замену переменных на основании уравнения (18) при равенстве  $\psi_1 = 0$ . Исходя из изложенного получается:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\varphi \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\xi e_1 \end{aligned} \quad (22)$$

В данном случае  $\varphi$  играет роль внутреннего управления и, исходя из технической цели и уравнений (22), можно его выразить. Задаётся следующая макропеременная:

$$\psi_2 = -e_1 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 \quad (23)$$

Для неё записывается основное функциональное уравнение:

$$T_2 \dot{\psi}_2 + \psi_2 = 0 \quad (24)$$

Оно будет устойчиво при любом  $T_2 > 0$ . Полная производная макропеременной по времени с учётом (22):

$$\dot{\psi}_2 = -\dot{e}_1 + \beta_1 \dot{z}_1 + \beta_2 \dot{z}_2 = \varphi + \beta_1 z_2 - \beta_2 \xi e_1 \quad (25)$$

Подставляя (25) и (23) в (24) получим:

$$T_2 \varphi + T_2 \beta_1 z_2 - T_2 \beta_2 \xi e_1 - e_1 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 = 0 \quad (26)$$

Откуда мы можем вывести закон внутреннего управления:

$$\varphi = -\frac{T_2 \beta_1 + \beta_2}{T_2} z_2 + \frac{T_2 \beta_2 \xi + 1}{T_2} e_1 - \frac{\beta_1}{T_2} z_1 \quad (27)$$

Данное управление осуществляет попадание изображающей точки на многообразие  $\psi_2 = 0$ , на котором выполняется технологическая цель, а также происходит затухание внешнего возмущения, так как при таком управлении в силу (23) и  $\psi_2 = 0$  получаем, что система (22) вырождается в:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\xi \beta_1 z_1 - \xi \beta_2 z_2 \end{aligned} \quad (28)$$

А такая система асимптотически устойчива при  $\xi \beta_1 > 0$ ,  $\xi \beta_2 > 0$ .

Для получения полного выражения управления (21) необходимо также выразить полную производную по времени от внутреннего управления. В силу (27) она будет равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{T_2 \beta_1 + \beta_2}{T_2} \dot{z}_2 + \frac{T_2 \beta_2 \xi + 1}{T_2} \dot{e}_1 - \frac{\beta_1}{T_2} \dot{z}_1 \\ &= \frac{T_2 \beta_1 + \beta_2}{T_2} \xi e_1 - \frac{T_2 \beta_2 \xi + 1}{T_2} \varphi - \frac{\beta_1}{T_2} z_2 \end{aligned} \quad (29)$$

Окончательно выражение для управления получается в виде:

$$u = k \cdot \text{sign}(e_2) + \frac{f_2}{f_1} - \frac{1}{f_1} \left( \frac{T_2 \beta_1 + \beta_2}{T_2} \xi e_1 - \frac{T_2 \beta_2 \xi + 1}{T_2} \varphi - \frac{\beta_1}{T_2} z_2 \right) - \frac{1}{f_1 T_1} e_2 - \frac{1}{f_1 T_1} \varphi \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{T_2 \beta_1 + \beta_2}{T_2} z_2 + \frac{T_2 \beta_2 \xi + 1}{T_2} e_1 - \frac{\beta_1}{T_2} z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\xi e_1 \end{aligned} \quad (31)$$

При этом, как уже отмечалось ранее, сигнал  $e_2$  является напрямую измеримым (сигнал с ВОГ), а сигнал  $e_1$  является, по сути, его интегралом. Так что для замыкания системы по ВОГ необходимо также ввести дополнительный интегратор:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{T_2 \beta_1 + \beta_2}{T_2} z_2 + \frac{T_2 \beta_2 \xi + 1}{T_2} e_1 - \frac{\beta_1}{T_2} z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\xi e_1 \\ \dot{e}_1 &= e_2 \end{aligned} \quad (32)$$

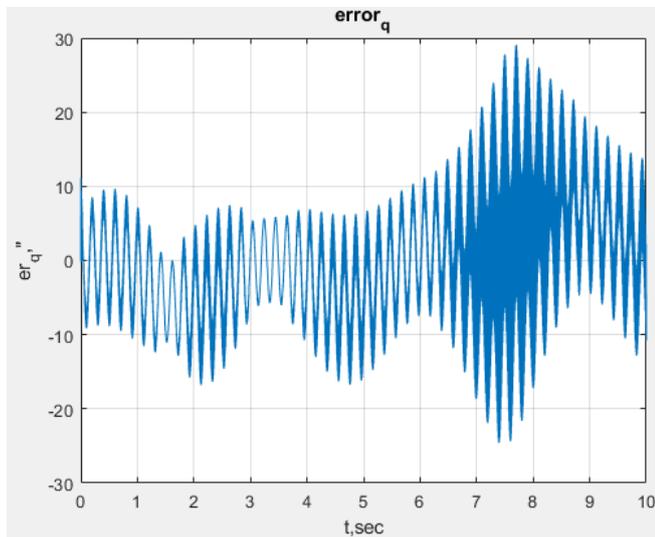


Рис. 1. Ошибка стабилизации внешней оси

Систему была исследована путем моделирования с выведенным регулятором при следующих параметрах возмущения и управления:  $\sigma = 0.5^\circ$ ,  $\alpha = 0.123$ ,  $\beta = 0.588$ ,  $T_1 = 0.01$ ,  $T_2 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 5$ ,  $\beta_2 = 5$ ,  $\xi = 100$ . Момент инерции всех колец брался равным  $0.8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , масса 30 кг. Параметры двигателя:  $T_{ЭМ} = 0.0013$ ,  $T_{Э} = 0.05$ ,  $c_e = 0.07$ ,  $c_m = 4.54$ ,  $L = 0.0022$ ,  $R = 2.5$ . На рис. 1 представлен результат моделирования системы с данными параметрами – процесс ошибки стабилизации по внешней самой нагруженной оси  $q$ , результаты показывают, что ошибка стабилизации не превосходит 30 угловых секунд.

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе метода АКАР был синтезирован синергетический закон управления трёхосным стабилизатором на подвижном основании, обеспечивающий достижение цели стабилизации – отработку качки основания, представленной случайным процессом. На основе результатов моделирования было продемонстрировано высокое качество управления на основе выбранного подхода. При этом не требуется сложных аналитических или численных вычислений, подбора параметров. Данный подход позволяет работать со сложными внешними возмущениями, обладая лишь информацией об их ограниченности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тюкин И.Ю., Терехов В.А. Адаптация в нелинейных динамических системах // Санкт-Петербург – 2006.
- [2] Borodin V.M., Spiridonov I.O., Faizutdinov R.N. Analysis of dynamics of a passive line-of-sight stabilization system with four-axis gimbal suspension // Russian Aeronautics. 2016. Т. 59. №. 4. С. 480-488.
- [3] Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию фильтрации. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 325–339.
- [4] Кузьменко А.А. Нелинейный синтез закона адаптивного управления частотой вращения гидротурбины: интегральная адаптация // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2015. №1-2. [Электронный ресурс] – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/nelineyny-sintez-zakona-adaptivnogo-upravleniya-chastotoy-vrascheniya-gidroturbiny-integralnaya-adaptatsiya/viewer> (дата обращения: 02.03.2024).