О комбинаторном свойстве одного класса групп

И. В. Добрынина

Московский технический университет связи и информатики

ivdobrynina@rambler.ru

Аннотация. **Рассматривается конечная порожденность изолятора подгруппы с числом порождающих, взятых в конечном числе, из группы Артина, порожденной двумя элементами, указывается эффективная процедура его построения.**

Ключевые слова: группа Артина; изолятор; подгруппа; комбинаторные свойства

I. Введение

Одним из комбинаторных свойств групп является свойство конечной порожденности изолятора конечно порожденной подгруппы. Кроме этого, встает вопрос об эффективной процедуре (алгоритме) его построения.

Согласно работе [1], введем используемые далее определения, касающиеся изолятора подгруппы, причем их будем рассматривать только для конечно порожденной подгруппы.

Определение 1 [1]. Изолированной в группе G будем называть такую ее подгруппу A, что для всякого $g \in G$ обладающего свойством $g^k \in A$ ($g \neq 1$), получаем, что $g \in A$.

Определение 2 [1]. Изолятором подгруппы A в группе G будем называть подгруппу, представляющую собой пересечение всевозможных содержащих подгруппу A и изолированных в G, подгрупп

Этот изолятор обозначим $J(A)$.

Определение 3. В группе G выполнено условие K, если изолятор $J(A)$ всякой подгруппы $A \leq G$ с конечным числом порождающих конечно порожден.

Рассмотрим группу Артина:

$$G = \left\langle a_1, a_2 ...., a_m;\ \left\langle a_i a_j \right\rangle^{t_{ij}} = \left\langle a_j a_i \right\rangle^{t_{ii}} \right\rangle.$$

Запись $\left\langle a_i a_j \right\rangle^{t_{ij}}$ означает произведение чередующихся порождающих a_i, a_j, взятых в количестве t_{ij} элементов, где t_{ij} соответствует матрице Кокстера [2], обладающей свойством симметричности. Далее будем работать с группой $G = \left\langle a_1, a_2;\ \left\langle a_1 a_2 \right\rangle^{t_{12}} = \left\langle a_2 a_1 \right\rangle^{t_{21}} \right\rangle$. Такая группа является двупорожденной группой Артина.

Теорема 1 [2]. Существует изоморфизм двупорожденной группы Артина G, соответствующей $t_{12} = 2n+1$, на группу $\left\langle b_1, b_2;\ b_1^{2m+1} = b_2^2 \right\rangle$.

Теорема 2 [2]. Существует изоморфизм двупорожденной группы Артина G, соответствующей $t_{12} = 2n$, $n > 1$, на группу $\left\langle t, b;\ t^{-1} b^m t = b^m \right\rangle$.

Теорема 3. Двупорожденная группа Артина G, соответствующая $t_{ij} = 2$, является абелевой.

Доказательство очевидно.

II. Основные утверждения

Рассмотрим случай теоремы 1. Как видим, решение проблемы конечной порожденности изолятора и вопрос его построения сводится к изучению этих проблем в свободном произведении групп с объединением. Для этого возьмем группу $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, $G = \left\langle A_1 * A_2;\ H_2 = \varphi(H_1) \right\rangle$ (объединяемая подгруппа, соответствующая условию на объединение, для краткости здесь записана как H). Считаем, что объединяемая подгруппа H изолирована.

Рассмотрим каноническое представление произвольного элемента $g \in G = A_1 \underset{H}{*} A_2$. Пусть это представление имеет вид:

$$g = l_1 ... l_n K_g r_n ... r_1 . \tag{1}$$

В формуле (1) K_g – ядро g, r_i, l_i^{-1} − представители правых смежных классов множителя A_1 по H_1 либо A_2 по H_2, r_i, r_{i+1} взяты из разных множителей группы G [3].

Слоговая длина в представлении (1) будет равна $L(g) = 2n+1$ в том случае, когда ядро K_g не будет лежать в H, а l_n, r_n являются элементами из одного и того же множителя G , отличного от того, в котором содержится K_g. Если произведения элементов, стоящие слева и справа от ядра в представлении (1) удовлетворяют условию $r_n…r_1 = (l_1…l_n)^{-1}$, то в (1) каноническое представление имеет вид $g = r_1^{-1} ... r_n^{-1} K_g r_n ... r_1$. Его назовем трансформой. Слоговая длина в представлении (1) будет давать $L(g) = 2n$, если $g = l_1 ... l_n h_g r_n ... r_1$, $h_g = K_g$, $K_g \in H$, при этом элементы l_n, r_n будут лежать в разных множителях группы G.

Левой половиной слова будем считать произведение $l_1…l_n$. Аналогично определяется правая половина.

Левая (аналогично правая) половина $w_i = l_{1i} ... l_{mi} K_i r_{mi} ... r_{1i}$ изолирована в $\left\{ w_i \right\}_{i=\overline{1,N}}$, если ни для какого слова из $\left\{ w_j \right\}^{\varepsilon}$ ($\varepsilon = \pm 1$) множества $\left(\left\{ w_i \right\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_i \right) \cup \left(\left\{ w_j^{-1} \right\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_i^{-1} \right)$ начальным (аналогично конечным) подсловом не является $l_{1i}…l_{mi}$ ($r_{mi}…r_{1i}$), что означает $w_j^{\varepsilon} \neq l_{1i} ... l_{mi} l_{m+1,i} w_j^{\varepsilon}$

$(w_j^{\varepsilon} \neq w_j^{\varepsilon} r_{m+1,j} r_{m,j} ... r_{1j})$ и принадлежность $l_{mi}, l_{m+1,i}$ $(r_{m+1,j}, r_{m,j})$ разным множителям G.

Определение 4 [3]. Назовем конечное множество $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ слов группы G специальным, если оно удовлетворяет условиям:

1. Левая половина нетрансформы из множества $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ изолирована в нем; если нетрансформа есть слово четной длины, то изолированы и левая, и правая половины.

2. Длину нетрансформы w_{i0} нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $\left\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_{i0}\right\}$; длину произвольного элемента $w_{i0} \in \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ нельзя уменьшить, умножая на слово w длины меньше $L(w_{i0})$ подгруппы $\left\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \right\rangle$.

3. Пусть $w_{i0}^{\varepsilon} = l_{1'} ... l_{n'} K_w r_{n'} ... r_{1'}$, $\varepsilon = \pm 1$ – нетрансформа из множества $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ и $\left\{w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = l_{1\alpha_i} ... l_{n\alpha_i} K_{\alpha_i} r_{n\alpha_i} ... r_{1\alpha_i}\right\}_{i=\overline{1,k}}$ $\varepsilon = \pm 1$ – подмножество нетрансформ из множества $\left(\{w_i\} \setminus w_{i0}\right) \cup \left(\{w_i^{-1}\} \setminus w_{i0}^{-1}\right)$, правая половина которых оканчивается подсловом, $r_{jw_0} ... r_{1w_0}$, $j < n$, тогда, если подгруппа $\left\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \right\rangle \cap r_{1'}^{-1} ... r_{j'}^{-1} D r_{j'} ... r_{1'} = B$, где $D = \begin{cases} A_1, \text{ если } r_{(j+1)'} \in A_1 \\ A_2, \text{ если } r_{(j+1)'} \in A_2 \end{cases}$ не единична, то

$$\begin{aligned} w_{i0} U &= l_{1'} ... l_{n'} K w r_{n'} ... r_{1'} U = \\ &= l_{1'} ... l_{n'} K_w r_{n'} ... r_{1'} r_{1'}^{-1} ... r_{j'}^{-1} D r_{j'} ... r_{1'} = \\ &= l_{1'} ... l_{n'} K_w r_{n'} ... r_{(j+1)'} . D r_{j'} ... r_{1'} \Rightarrow L(w_{i'} U) \geq L(w_{i'}), \end{aligned}$$

где $U \in B$, $L(w_{i'} U w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}) \geq L(w_{i'})$.

4. Пусть $w_i = l_{1w_i} ... l_{sw_i} l_{s+1,w_i} ... l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} ... r_{s+1,w_i} r_{sw_i} ... r_{1w_i}$, $w_j = l_{1w_j} ... l_{sw_j} l_{s+1,w_j} ... l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} ... r_{s+1,w_j} r_{sw_j} ... r_{1w_j}$. Слова из $\left\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \right\rangle$, не обязательно различные, $m \leq n$, $s \leq m$, тогда не существует слова $g \neq 1$ длины меньше $2s$ из подгруппы $\left\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \right\rangle$ такого, что если $l_{1w_i} ... l_{sw_i} \neq l_{1w_j} ... l_{sw_j}$, то

$$g w_i = l_{1w_j} ... l_{sw_j} l'_{s+1,w_j} ... l'_{nw_j} K'_{w_i} r_{nw_i} ... r_{s+1,w_i} r_{sw_i} ... r_{1w_i},$$

либо, если $r_{sw_i} ... r_{1w_i} \neq r_{sw_j} ... r_{1w_j}$, то

$$w_i g = l_{1w_i} ... l_{sw_i} l_{s+1,w_i} ... l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} ... r'_{s+1,w_i} r_{sw_j} ... r_{1w_j},$$

либо, если $r_{1w_i}^{-1} ... r_{sw_i}^{-1} \neq l_{nw_j} ... l_{sw_j}$, то

$$g w_i^{-1} = l_{1w_j} ... l_{sw_j} (r'_{s+1,w_i})^{-1} ... (r'_{nw_i})^{-1} (K'_{w_i})^{-1} l_{nw_i}^{-1} ... l_{1w_i}^{-1},$$

либо, если $l_{sw_i}^{-1} ... l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} ... r_{1w_j}$, то

$$w_i^{-1} g = r_{1w_i}^{-1} ... r_{nw_i}^{-1} (K'_{w_i})^{-1} (l'_{nw_i})^{-1} ... (l'_{s+1,w_i})^{-1} r_{sw_j} ... r_{1w_j}.$$

Теорема 4 [4]. Группа $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$ с $\varphi(H_1) = H_2$, где $H_1 < A_1$, $H_2 < A_2$, изоморфизм φ фиксирован и конструктивен. Если в A_i, $i = 1, 2$, выполнены условия:

1) алгоритмически разрешима проблема вхождения;
2) H_1, H_2 обладают условием максимальности;
3) алгоритмически разрешима проблема пересечения классов смежности произвольной подгруппы с конечным числом порождающих из множителя A_i, и объединяемой подгруппы;
4) существует алгоритм, позволяющий найти порождающие пересечения произвольной подгруппы с конечным числом порождающих из множителя A_i, $i = 1, 2$, и объединяемой подгруппы;

то в группе G всякое конечное множество слов эффективно приводится к специальному множеству.

Разобьем все слова специального множества слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ из G на подмножества: M_0 – нетрансформы и M_i – трансформы одного типа, содержащиеся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из множителя A_1 или множителя A_2. Далее будем рассматривать подгруппу (M_i), $i = 0, 1, 2, …, k$, образующими которой выступают соответствующие элементы из M_i, $i = 0, 1, 2, …, k$. Для $i = 1, 2, …, k$ имеем $(M_i) = r_{1i}^{-1} ... r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} ... r_{1i}$, здесь C_i порождаются ядрами трансформ и являются подгруппами из $A_1 \cup A_2$. Подгруппы (M_i), $i = 1, …, k$, расположим в порядке возрастания слоговых длин их крыльев. В результате образуется последовательность:

$$(M_1) \leq (M_2) \leq ... \leq (M_k) \qquad (2)$$

Лемма 1 [3]. Существует алгоритм, преобразующий последовательность (2) в ряд вида (2'):

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq ... \leq (M'_{k'}), \qquad (2')$$

в котором выполнены условия:

1. $gp(M_0, (M_1), ..., (M_k)) = gp(M_0, (M'_1), ..., (M'_{k'}))$.

2. Если подгруппе $(M'_j) = r_{1x}^{-1} ... r_{nx}^{-1} C'_j r_{nx} ... r_{1x}$, $1 \leq j \leq k'$ ряда (2') принадлежит трансформа $U = r_{1x}^{-1} ... r_{nx}^{-1} h r_{nx} ... r_{1x}$, где h принадлежит объединеняемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (2') имеется подгруппа $(M'_i) = r_{1x}^{-1} ... r_{nx}^{-1} C_i r_{nx} ... r_{1x}$, $1 \leq i \leq k'$, содержащая U.

3. Если для некоторой трансформы $U = r_{1x}^{-1} ... r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} ... r_{1x}$, принадлежащей подгруппе $(M'_j) = r_{1x}^{-1} ... r_{nx}^{-1} C'_j r_{nx} ... r_{1x}$, и нетрансформы $y = l_{1y} ... l_{n_1 y} K_y r_{n_1 y} ... r_{1y}$ из M_0, $n_1 \geq n$ (левая половина y изолирована) выполняется соотношение $L(y^{-1} U y) \leq L(y)$, то существует подгруппа (M'_s) ряда (2'), содержащая трансформу $y^{-1}(r_{1x}^{-1} ... r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} ... r_{1x}) y$, а если $L(y U y^{-1}) < L(y)$, то существует подгруппа (M'_s) из ряда (2'), содержащая $y(r_{1x}^{-1} ... r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} ... r_{1x}) y^{-1}$.

4. Пусть $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} C'_j\, r_{n_1x} \dots r_{1x}, (M'_s) = = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,\,y}^{-1} \dots r_{n_2y}^{-1} K_x r_{n_2y} \dots r_{1x}$ – подгруппы ряда (2'), $n_2 > n_1$, и подгруппа (M'_j) содержит трансформу $U = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} h r_{n_1x} \dots r_{1x}$ либо $U' = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} K r_{n_1x} \dots r_{1x}$, где $K = r_{n_1+1,\,x}^{-1} h r_{n_1+1,\,x}$, тогда существует подгруппа ряда (2') $(M'_k) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,\,x}^{-1} C'_K\, r_{n_1+1,\,x} \dots r_{1x}$, содержащая в первом случае трансформу U, во втором – U'.

5. Если $(M'_s) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} C'_x\, r_{n_1x} \dots r_{1x}$ – подгруппа из ряда (2') и $y^{\varepsilon} = l_{1y} \dots l_{n_2y} K r_{n_2y} \dots r_{n_1+1,\,y} r_{n_1x} \dots r_{1x}$ (ε = ±1) – элемент специального множества, причем подслово $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,\,y}^{-1}$ не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы w^{ε} (ε = ±1) и если подгруппа (M'_s) содержит трансформу $U = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} h r_{n_1x} \dots r_{1x}$ либо $U' = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} K r_{n_1x} \dots r_{1x}$, где $K = r_{n_1+1,\,y}^{-1} h r_{n_1+1,\,y}$, то в ряду (2') существует подгруппа $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,\,y}^{-1} C'_j\, r_{n_1+1,\,y} \dots r_{1x}$ содержащая эту трансформу.

Лемма 2 [3]. (M_0), не содержащая трансформ, является свободной подгруппой.

Пусть $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ – специальное множество. Через $gp(M_0, S)$ будем далее будем обозначать $\left\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \right\rangle$.

Определение 5 [3]. Словом $U_1 \dots U_k$ на U − символах подгруппы $\langle w_1, \dots, w_N \rangle = gp(M_0, S)$ из $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$ будем считать произведение $U_1 \dots U_k$ при соблюдении условий:

1) соседние символы U_i, U_{i+1} не лежат в одной подгруппе из (2');
2) $U_i \neq 1$, $U_i \neq U_{i+1}^{-1}$, $U_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$ или $U_i \in$ (2');
3) $U_1 \dots U_k$ не содержит $U_i U_{i+1} U_{i+2}$, i = 1, …, k – 2, такого, что $U_i = U_{i+2}^{-1}$, $U_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $U_{i+1} \in (M_j)$ и $U_i U_{i+1} U_{i+2} \in (M_s)$; ($M_s$), ($M_j$) – из (2').

Лемма 3. Существует алгоритм, переводящий $w_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots w_{i_m}^{\varepsilon_m}$ (ε = ±1) из подгруппы $\left\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \right\rangle$ в слово $U_{i_1} \dots U_{i_k}$, $k \le m$, на U – символах подгруппы $gp(M_0, S) = \left\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \right\rangle$.

Доказательство получаем из [3] и теоремы 4.

Лемма 4 [3]. Если $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, $N = B_1 \underset{H'}{*} B_2$, причем $B_i < A_i$, i = 1, 2, $H' < H$, B_1, B_2 задаются конечным числом порождающих и являются изолированными. Группы A_i, i = 1, 2, удовлетворяют условию K. H обладает свойством максимальности и является изолированной. Тогда $J(N)$ обладает свойством конечной порожденности.

Пусть $a_1 \dots a_i \dots a_n$ − нормальная запись слова из группы $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, то есть запись в U − символах.

Рассмотрим элементы $w_1 = a_1 \dots a'_i$, $w_n = a''_i\, a_{i+1} \dots a_n$, причем $a_i = a'_i\, a''_i$.

Определение 6 [3]. Подслова w_l и w_n слова w есть результат правильного разрыва слова w, если $a''_i = 1$. Если при этом $a'_i \neq 1$ и $a''_i \neq 1$, то имеем неправильный i − разрыв w.

Определение 7 [3]. Пусть имеем i − разрыв слова w: w_{il}, w_{in}. Тогда разрыв вида $w_{il}C^{-1}$, Cw_{in}, где C − произвольное слово группы $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$ назовем обобщенным правильным i − разрывом, если i − разрыв слова w был правильным, и обобщенным неправильным, если неправильным.

Определение 8 [3]. Пусть $w \in G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, $N < G$, $w^k \in N$, $w \,\bar{\in}\, N$. Расширение N с помощью элемента w будем называть корневым и обозначать $K_w(N) = gp\{N, w\}$. При выполнении условия $L(w) = L(w^k)$, корневое расширение имеет 1-ый род и обозначается $K_w^{\mathrm{I}}(N)$, при выполнении условия $L(w) < L(w^k)$, корневое расширение имеет 2-ой род и обозначается $K_w^{\mathrm{II}}(N)$.

Лемма 5. Если $w \in G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, $N = gp(M_0, S) < G$, $w \notin N$, $w^k \in N$, $L(w) > L(w^k)$ и $w = Aa_1 \dots a_k A$, где $A = t_1 \dots t_p$, то можно эффективно преобразовать w в слово $w' = A' a_1 \dots a_n A'^{-1}$, сопрягая w элементом из N, где A' – подслово левой половины для некоторого U – символа, при этом присоединения w' к N и w к N равнозначны.

Доказательство следует из теоремы 4 и работы [3].

Лемма 6. Пусть $w \in G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, $N = gp(M_0, S) < G$, $w \in N$. Если $w^k \in N$ и $L(w^k) > L(w)$, то расширению подгруппы N с помощью слова w соответствует обобщенный правильный или неправильный разрыв некоторого U − символа группы, который можно эффективно определить.

Доказательство получаем из [3] и теоремы 4.

Рассмотрим вспомогательный ряд [3]:

$$D_1 \le D_2 \le \dots \le D_{N_1}. \quad (3)$$

Построим характеристику множества U − символов подгруппы $N = gp(M_0, S)$. Для этого зададим отображение P на множество нетрансформ M_0 и подгруппах ряда (3) следующим образом: $P(y_i) = y_i$;

$$P(D_j) = P(r_{1j}^{-1} \dots r_{kj}^{-1} A_l r_{kj} \dots r_{1j}) = \\ = \begin{cases} r_{1j}^{-1} \dots r_{kj}^{-1} \alpha r_{kj} \dots r_{1j}, \text{ если } r_{kj} \in A_1 \\ r_{1j}^{-1} \dots r_{kj}^{-1} \beta r_{kj} \dots r_{1j}, \text{ если } r_{kj} \in A_2 \end{cases}$$

α, β – символы единичной длины.

Определение 9 [3]. Характеристикой множества U − символов подгруппы $N = gp(M_0, S)$ назовем набор пар $\chi = ((p_1, 1), \dots, (p_l, l))$, где p_i − число элементов $P(y_i)$ и $P(D_s)$ длины i: l − максимальная длина элементов из $\{P(y_i)\}$ и $\{P(D_s)\}$.

Определение 10. Пусть U и U' – два множества U – символов и $\chi(U) = ((p_1, 1), …, (p_l, l))$ и $\chi(U') = ((p'_1, 1), ..., (p'_l, l'))$ – их характеристики. Тогда $\chi(U) < \chi(U')$, если 1) $l < l'$ или 2) при $l = l'$, то $p_1 = p'_1, ..., p_{l-j+1} = p'_{l'-j+1}$, но $p_{l-j} \neq p'_{l'-j}$, где $0 \le j \le l-1$.

Лемма 7 [3]. Пусть подгруппе $N = gp(M_0, S)$ соответствует множество U – символов U, а расширенной подгруппе $\langle N, w\rangle$ – множество U – символов – U', где $w \notin N$, $L(w^k) > L(w)$, причём $w^k \in N$. Тогда $\chi(U) \le \chi(U')$.

Лемма 8. Пусть цепочке $N < N_0 < N_1 <…< N_s <…$ вложенных подгрупп групп $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, где $N_{i+1} = K_w^{\mathrm{II}}(N_i)$, i = 0, 1, …, s, …, соответствует последовательность характеристик таких, что $\chi^{(0)} \ge \chi^{(1)} \ge$ $\ge … \ge \chi^{(S)} \ge …$. Если, начиная с некоторого номера j, получаем равенства: $\chi^{(j)} = \chi^{(j+1)} = … = \chi^{(j+n)} = …$, то эффективно определяется такое $n < \infty$, что либо $\chi^{(j+n)} > \chi^{(j+n+1)}$, либо подгруппы N_j, начиная с N_{j+n}, совпадают.

Доказательство получаем из [3] и теоремы 4.

Определение 11 [3]. $\dot{J}$ – преобразованием подгруппы N назовём преобразование, заменяющее каждую подгруппу (M_i), $i = 1, …, k$, ее изолятором $J(M_i)$.

Лемма 9 [3]. Пусть подгруппе $N = gp(M_0, S)$ соответствует множество U − символов U, а подгруппе $gp(M_0, J(\mathrm{M}_1), …, J(\mathrm{M}_k))$, полученной из N с помощью $\dot{J}$ – преобразования – множество U'. Тогда $\chi(U') \le \chi(U)$.

Лемма 10. Пусть цепочке $N = N_0 \le N_1 \le …$ вложенных подгрупп группы $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, где $N_i = \dot{J}(N_{i-1})$, i = 1, …, s, …, соответствует цепочка характеристик $\chi^{(0)} \ge \chi^{(1)} \ge$ $… \ge \ge \chi^{(s)} \ge …$. Если, начиная с некоторого номера, выполнено условие: $\chi^{(j)} = \chi^{(j+1)} = … = \chi^{(j+n)} = …$, то эффективно определяется такое $n < \infty$, что либо $\chi^{(j+n)} > \chi^{(j+n+1)}$, либо подгруппы N_i, начиная с N_{j+n}, совпадают.

Доказательство получаем из [3] и теоремы 4.

Лемма 11 [3]. Пусть $N = gp(M_0, S)$ − подгруппа с конечным числом порождающих группы $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, множители A_1 и A_2 удовлетворяют условию K. $J(H) = H$ и $\dot{J}(N) = N$. Тогда $K_w^{\mathrm{I}}(N) = N$.

Теорема 5 [3]. Если $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$ − свободное произведение удовлетворяющих условию K групп A_1 и A_2 с объединением по изолированной подгруппе H с условием максимальности, то и G удовлетворяет условию K.

Теорема 6. Если $G = A_1 \underset{H}{*} A_2$, причем множители A_1 и A_2 удовлетворяют условию K, H − условию максимальности и изолированию, то можно эффективно построить изолятор всякой подгруппы с конечным числом порождающих.

Далее остановимся на случае теоремы 2. В ней рассматривается HNN-расширение вида $G = \langle G', t;\ t^{-1}xt = \varphi(x), x \in U_1\rangle$, то есть HNN-расширение некоторой группы G' с изоморфизмом φ и подгруппами U_1, U_{-1} и проходной буквой t, $t \notin G'$.

Аналогично случаю свободного произведения доказывается следующая теорема. Параллельно строится алгоритм для изолятора.

Теорема 7 [5]. Пусть $G = \langle G', t;\ t^{-1}xt = \varphi(x),\ x \in U_1\rangle$ является HNN-расширением G' с подгруппами U_1, U_{-1} и изоморфизмом φ, t, $t \notin G'$ − проходная буква. Если G' удовлетворяет условию K, то G удовлетворяет условию K.

Теорема 8. Пусть $G = \langle G', t;\ t^{-1}xt = \varphi(x),\ x \in U_1\rangle$ является HNN-расширением G' с подгруппами U_1, U_{-1} и изоморфизмом φ, t, $t \notin G'$ − проходная буква. Если G' удовлетворяет условию K, то можно эффективно построить изолятор конечно порожденной подгруппы.

В случае 3 доказательство очевидно.

III. Заключение

Таким образом, получили следующую теорему.

Теорема 9. В двупорожденной группе Артина $G = \langle a_1, a_2;\ \langle a_1a_2\rangle^{t_{12}} = \langle a_2a_1\rangle^{t_{21}}\rangle$ изолятор всякой подгруппы с конечным числом порождающих конечно порожден.

Теорема 10. В двупорожденной группе Артина $G = \langle a_1, a_2;\ \langle a_1a_2\rangle^{t_{12}} = \langle a_2a_1\rangle^{t_{21}}\rangle$ существует эффективная процедура построения изолятора подгруппы с конечным числом порождающих.

Она дает полное исследование изолятора подгруппы с конечным числом порождающих в двупорожденной группе Артина.

Благодарность

Выражаю благодарность профессору В. Н. Безверхнему за внимание к исследованию.

Список литературы

[1] Контрович П.Г. Группы с базисом расщепления, III. // Математический сборник, 1948. Т. 22. С. 79-100.

[2] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы конечной ширины в группах Артина с двумя образующими // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, № 1 (3). 11-16.

[3] Безверхняя И.С. О корневом замыкании подгрупп свободного произведения групп с объединением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 1983. С. 81-112.

[4] Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 1986. С. 3-22.

[5] Безверхний В.Н., Безверхняя И.С. О корневом замыкании подгрупп в HNN-группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 1990. С. 14-42.