Отношения эквивалентности на мультимножествах

В. Б. Гисин

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

vgisin@fa.ru

Е. С. Волкова

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

evolkova@fa.ru

Аннотация. **В работе показано, что строгие эпиморфизмы в категории мультимножеств устойчивы в декартовых квадратах, а строгие мономорфизмы в ко-декартовых квадратах. Это позволяет построить категорию соответствий и категорию ко-соответствий для мультимножеств и описать отношения эквивалентности в этих категориях.**

Ключевые слова: мультимножество; категория; категория соответствий; отношения эквивалентности

I. Введение

Достаточно типичным в моделях искусственного интеллекта является подход, при котором некоторые объекты отождествляются в зависимости от «точки зрения». Например, в теории формальных понятий ключевым является отношение объект-признак. Объекты, имеющие одинаковый набор признаков, считаются эквивалентными. Тем самым пространство объектов по существу превращается в мультимножество, т.е. множество, в котором некоторые элементы могут содержаться в нескольких экземплярах. Полное отождествление таких элементов (переход к фактор-множеству) может привести к потерям. При изменении признакового пространства отождествленные элементы могут стать различимыми. Термин «мультимножество» был предложен Де Бройном [1], а важную роль мультимножеств в теории алгоритмов отмечал Кнут в соей книге «Искусство программирования». Имеются многочисленные примеры применения мультимножеств в информатике и информационной безопасности [2, 4, 5, 8–11]. В частности, мультимножества используются для построения различного рода семантик. В общем виде это можно представить следующим образом. Если L – язык, построенный из элементов некоторой базовой сигнатуры с использованием синтаксических конструкций, то семантика S получается отождествлением языковых конструкций в L, которым приписывается одинаковый смысл.

Изучение (и применение) мультимножеств ведется, как правило, с помощью языка и аппарата теории категорий. Категория мультимножеств не является точной. Это проявляется, например, в том, что биективное отображение мультимножеств может не быть изоморфизмом. В общем случае неточность может проявляться также и в том, что не всякое отношение эквивалентности является конгруэнцией (т. е. имеются отношения эквивалентности, по которым нельзя факторизовать соответствующий объект). При анализе этого свойства в случае мультимножеств мы сталкиваемся с проблемой, что считать отношением эквивалентности на мультимножестве и в более широком контексте, что считать бинарным отношением между мультимножествами. В работе [6] сделана попытка (не вполне последовательная) подойти к описанию бинарных отношений между мультимножествами. В [6] вводится понятие бинарного отношения мультимножеств, и затем изучаются его свойства. В настоящей работе применяется другой подход, используемый в теории категорий соответствий, [3, 5]. Бинарное отношение трактуется как композиция отображений и их обращений.

В зависимости от порядка множителей возникают два типа бинарных отношений. Бинарное отношение между X и Y может быть представлено как соответствие дробью вида $X \leftarrow U \rightarrow Y$ или как ко-соответствие ко-дробью вида $X \rightarrow W \leftarrow Y$. То, какие представления соответствия (или ко-соответствия) дробями считать эквивалентными, зависит от структуры $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{M})$-декомпозиции отображений (морфизмов), где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{M}$ взаимно ортогональные класса соответственно эпи- и мономорфизмов. В общей теории соответствий (см. [3]) установлено, что при достаточно общих предположениях (выполняющихся для мультимножеств) композиция соответствий, индуцированная композицией дробей, ассоциативна в том и только том случае, когда класс $\boldsymbol{E}$ устойчив в декартовых квадратах. По двойственности, композиция ко-соответствий ассоциативна в том и только том случае, когда мономорфизмы из $\boldsymbol{M}$ устойчивы в ко-декартовых квадратах.

В настоящей работе дается описание строгих эпиморфизмов и мономорфизмов в категории мультимножеств и доказывается их устойчивость соответственно в декартовых и ко-декартовых квадратах. Этим открывается возможность применения аппарата категорий соответствий для анализа отношений эквивалентности на мультимножествах. Приведено описание отношений эквивалентности на мультимножествах в категории соответствий и в категории ко-соответствий.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведены основные определения и обозначения. В разделе 3 приведено описание строгих эпиморфизмов. Доказано, что строгие эпиморфизмы устойчивы в декартовых квадратах, а строгие мономорфизмы – в ко-декартовых квадратах. В разделе 4 дано описание отношений эквивалентности на мультимножествах в терминах соответствий и ко-соответствий.

II. Основные определения и обозначения

Пусть $\boldsymbol{C}$ – конечно полная категория, в которой выделены замкнутые относительно композиции класс эпиморфизмов $\boldsymbol{E}$ и класс мономорфизмов $\boldsymbol{M}$, образующие *ортогональное разложение*. Это означает, что каждый из этих классов является ортогональным дополнением другого, и всякий морфизм f из $\boldsymbol{C}$ однозначно (с точностью до изоморфизма) представим в виде $f = pm$, где $p \in \boldsymbol{E}$, а $m \in \boldsymbol{M}$. Напомним, что эпиморфизм p и мономорфизм m называются *ортогональными*, если в любом коммутативном квадрате $pg = fm$ найдется диагональный морфизм h такой, что $hm = g$ и $ph = f$. Эпиморфизм p (мономорфизм m) называется *строгим*, если p (соотв. m) ортогонален любому мономорфизму (соотв. любому эпиморфизму).

Замечание. Композицию здесь и далее мы записываем слева направо: если $f{:}X \to Y$ и $g{:}Y \to Z$, то $fg{:}X \to Z$.

Пару морфизмов вида $f{:}X \leftarrow U \to Y{:}g$ будем называть *дробью* (с областью X и кообластью Y) и обозначать $f \setminus g$. На множестве дробей с общей областью и общей кообластью введем отношение частичного предпорядка (относительно пары $\boldsymbol{E}$ и класс мономорфизмов $\boldsymbol{M}$): если $f{:}X \leftarrow U \to Y{:}g$ и $h{:}X \leftarrow V \to Y{:}k$, то $(f \setminus g) \subseteq (h \setminus k)$ в том и только том случае, когда найдутся эпиморфизм p из $\boldsymbol{E}$ и морфизм s, такие что $pf = sh$ и $pg = sk$. Дроби $f \setminus g$ и $h \setminus k$ считаются эквивалентными, если $(f \setminus g) \subseteq (h \setminus k)$ и $(h \setminus k) \subseteq (f \setminus g)$. Класс эквивалентных дробей задает соответствие. Дроби, эквивалентные дроби $f{:}X \leftarrow U \to Y{:}g$, задают соответствие из X в Y, которое мы будем обозначать $[f \setminus g]$ или просто $f \setminus g$. Композиция соответствий определяется с помощью декартовых квадратов. Пусть даны соответствия, заданные дробями $f{:}X \leftarrow U \to Y{:}g$ и $h{:}Y \leftarrow V \to Z{:}k$. Тогда, используя для обозначения композиции символ ";", получаем $[f \setminus g];[h \setminus k] = [sf \setminus tk]$, где $sg = th$ – декартов квадрат на морфизмах $g{:}U \to Y \leftarrow V{:}h$. Корректность введенных определений обеспечивается устойчивостью класса $\boldsymbol{E}$ в декартовых квадратах. Объекты категории $\boldsymbol{C}$ с соответствиями в качестве морфизмов образуют так называемую *категорию соответствий* $Rel(\boldsymbol{C})$. Соответствия мы будем, как правило, обозначать малыми греческими буквами.

Единицей объекта X служит соответствие $\delta_X = [1_X \setminus 1_X]$, которое мы будем также обозначать 1_X или просто 1, если это не вызывает недоразумений. Для любой пары объектов X и Y на множестве соответствий из X в Y имеется частичный порядок индуцированный предпорядком на множестве дробей; мы будем обозначать его тем же символом $\subseteq$. Если $\alpha = [f \setminus g]$ – соответствие из X в Y, то $\alpha' = [g \setminus f]$ называется инволюцией. Инволюция задает контравариантный функтор из $Rel(\boldsymbol{C})$ в $Rel(\boldsymbol{C})$. Соответствие α называется *функциональным*, если $\alpha;\alpha' \supseteq 1$ и $\alpha';\alpha \subseteq 1$. Функциональные соответствия образуют подкатегорию. Если $\alpha' = [f \setminus g]$, условие $\alpha;\alpha' \supseteq 1$ равносильно тому, что f – эпиморфизм класса $\boldsymbol{E}$. Соответствие α на объекте X будем называть отношением эквивалентности, если $\alpha \supseteq 1_X$, $\alpha' = \alpha$ и $\alpha;\alpha \subseteq \alpha$.

Сопоставляя морфизму f категории $\boldsymbol{C}$ его график $\Gamma(f) = [1 \setminus f]$, получаем вложение категории $\boldsymbol{C}$ в категорию функциональных соответствий категории $Rel(\boldsymbol{C})$. В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, мы будем вместо $\Gamma(f)$ писать просто f. С учетом этого имеем $[f \setminus g] = f';g$.

III. Строгие эпи- и мономорфизмы в категории мультимножеств

В определении категории мультимножеств $\boldsymbol{Mul}$ мы следуем [12]. Объекты категории мультимножеств $\boldsymbol{Mul}$ имеют вид (X,ρ), где X – множество, а ρ – отношение эквивалентности на X. Мы будем использовать запись $x_1\rho x_2$, чтобы показать, что элементы x_1 и x_2 множества X связаны отношением ρ. Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что морфизмы из (X,ρ) в (Y,σ) в категории $\boldsymbol{Mul}$ – это (ρ,σ)-*совместимые* отображения из X в Y, т.е. такие отображения $f{:}X \to Y$ для котором из $x_1\rho x_2$ следует $f(x_1)\sigma f(x_2)$. В терминах категории соответствий над категорией множеств последнее означает, что $\rho;f \subseteq f;\sigma$, или, что то же, $\rho \subseteq f;\sigma;f'$. Для (ρ,σ)-совместимых отображений мы будем использовать запись $f{:}\ (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. В [12] установлен ряд свойств категории $\boldsymbol{Mul}$. Показано, что в $\boldsymbol{Mul}$ существуют конечные пределы и копределы. Описаны моно- и эпиморфизмы: морфизм $f{:}(X,\rho) \to (Y,\sigma)$ в категории $\boldsymbol{Mul}$ является моно- (эпи-) морфизмом тогда и только тогда, когда отображение f из X в Y инъективно (соответственно, сюръективно). Несложно показать, что f является строгим мономорфизмом, в том случае, когда $\rho = f;\sigma;f'$, т.е. когда отношение эквивалентности ρ на X индуцировано отношением эквивалентности σ на Y. Если считать, что f – вложение, это означает, что $x_1\rho x_2$ тогда и только тогда, когда $x_1\sigma x_2$ для любых x_1 и x_2 из X. Описание строгих эпиморфизмов дает следующая теорема, которую мы приводим без доказательства (достаточно прямолинейного, но связанного с довольно громоздкими выкладками).

Теорема 1. Морфизм $p{:}(X,\rho) \to (Y,\sigma)$ в категории $\boldsymbol{Mul}$ является строгим эпиморфизмом тогда и только тогда, когда отображение $p{:}X \to Y$ сюръективно и

$$\sigma = p';(\rho \vee p;p');p \tag{1}$$

где $\rho \vee p;p'$ – транзитивное замыкание объединения ρ и $p;p'$ (верхняя грань ρ и $p;p'$ в решетке отношений эквивалентности на множестве X).

Правую часть (1) будем в дальнейшем использовать сокращенно обозначать $\rho / p;p'$.

Теорема 2. Если $hp = qf$ – декартов квадрат (на кофинальных морфизмах p и f) в категории $\boldsymbol{Mul}$, а p – строгий эпиморфизм, то q – также строгий эпиморфизм.

Доказательство. Пусть

$$p{:}(X,\rho) \to (Y,\sigma),\ f{:}(Z,\tau) \to (Y,\sigma),$$
$$q{:}(U,\varphi) \to (Z,\tau),\ h{:}(U,\varphi) \to (X,\rho)$$

– морфизмы в $\boldsymbol{Mul}$, составляющие декартов квадрат. Стирающий функтор из категории мультимножеств в категорию множеств обладает правым сопряженным функтором и левым сопряженным функтором, так что стирающий функтор сохраняет конечные пределы и копределы и, в частности, декартовы квадраты. С учетом этого можно считать, что $U = \{(x,z) \in X \times Z | \, p(x) = f(z)\}$, а $h{:}U \to X$ и $q{:}U \to Z$ – проекции соответственно на первую и вторую компоненты. Кроме того, (U,φ) – строгий подобъект произведения $(X,\rho) \times (Z,\tau)$ в категории ***Mul***. Это означает, что $(s,u)\varphi(t,v)$ равносильно тому, что $s\rho t$ и $u\tau v$.

Предположим, что p – строгий эпиморфизм. Тогда по теореме 1 имеет место (1), а требуется доказать, что $\tau = q';(\varphi \vee q;q');q$. Так как q – сюръективное отображение U на Z и, значит, $q';q = 1$, достаточно доказать, что $q;\tau;q' = \varphi \vee q;q'$. Отображение q (φ,τ)-совместимо, так что $\varphi \subseteq q;\tau;q'$. Кроме того, $q;q' \subseteq q;\tau;q'$. Следовательно, $\varphi \vee q;q' \subseteq q;\tau;q'$.

Докажем обратное включение. Пусть (s,u) и (t,v) – элементы из U и $(s,u)(q;\tau;q')(t,v)$. Отсюда следует, что $u\tau v$. Далее, $(s,u)(q;q')(t,u)$, поскольку q – это проекция на вторую компоненту. Наконец, $(t,u)\varphi(t,v)$, так как $t\rho t$ в силу рефлексивности ρ и, как было показано ранее, $u\tau v$. Таким образом, (s,u) и (t,v) связаны транзитивным замыканием объединения φ и $q;q'$, т.е. $(s,u)(\varphi \vee q;q')(t,v)$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если $mg = fn$ – ко-декартов квадрат (на коинициальных морфизмах m и f) в категории ***Mul***, а m – строгий мономорфизм, то n – также строгий мономорфизм.

Доказательство. Пусть

$$m{:}\ (Z,\tau) \to (X,\rho),\ f{:}(Z,\tau) \to (Y,\sigma),$$

$$g{:}\ (X,\rho) \to (U,\varphi),\ n{:}\ (Y,\sigma) \to (U,\varphi)$$

морфизмы в ***Mul,*** составляющие ко-декартов квадрат. Без потери общности можно считать, что $Z \subseteq X$, $m{:}Z \to X$ – вложение и τ – сужение ρ на Z. Требуется показать, что n – мономорфизм и $\sigma = n;\varphi;n'$. Первое утверждение очевидно, поскольку стирающий функтор сохраняет ко-пределы. Докажем второе.

Чтобы не загромождать обозначения, будем считать, что множества X и Y дизъюнктны, а i и j – вложения соответственно X и Y в дизъюнктное объединение $X[+]Y = X \cup Y$.

Рассмотрим отношение эквивалентности ε на в $X \cup Y$ такое, что

$$x\varepsilon u \Leftrightarrow x = u \text{ при } x,u \in X \text{ или } g(x) = g(u) \text{ при } x,u \in Z,$$

$$y\varepsilon v \Leftrightarrow y = v \text{ при } y,v \in Y,$$

$$x\varepsilon y \Leftrightarrow g(x) = y \text{ при } x \in X,\ y \in Y.$$

Пусть $h{:}\ X \cup Y \to (X \cup Y)/\varepsilon$.

Тогда можно считать, что $U = (X \cup Y)/\varepsilon$,

$$\varphi = h';((\rho \cup \sigma)\vee\varepsilon);h$$

и $g = ih$, $n = jh$.

Так как $x\varepsilon u \Rightarrow f(x)\sigma f(u)$ при $x,u \in Z$, то $j;(\rho \cup \sigma);j' = \sigma$. Теперь, учитывая, что $\varepsilon = h;h'$, прямой проверкой несложно убедиться, что

$$n;\varphi;n' = j;((\rho \cup)\vee\varepsilon);j'$$

и, значит, $n;\varphi;n' \supseteq \sigma$.

Докажем обратное включение. Положим $\theta = \rho \cup \sigma \cup \varepsilon$. Используя математическую индукцию, можно убедиться, что $j;\theta^l;j' \subseteq \sigma$ при любом целом $l \geq 0$. Но это и означает, что

$$n;\varphi;n' = j;((\rho \cup)\vee\varepsilon);j' \subseteq \sigma,$$

что и завершает доказательство.

IV. Отношения эквивалентности на мультимножествах

Всякий морфизм $f{:}(X,\rho) \to (Y,\sigma)$ в категории ***Mul*** представим в виде композиции строгого эпиморфизма, биморфизма и строгого мономорфизма:

$$(X,\rho) \to (f(X),\ \rho\ /\ (p;p')) \to (f(X),\ m;\sigma;m') \to (Y,\sigma) \quad (2)$$

где $p{:}X \to f(X)$ – отображение на образ, $m{:}\ f(X) \to Y$ – вложение, а средний морфизм задается тождественным отображением. В соответствии с (2) получаем два ортогональных разложения категории мультимножеств: (***Epi***$_s$, ***Mono***) и (***Epi***, ***Mono***$_s$), где ***Epi*** и ***Mono*** – классы всех эпи- и мономорфизмов соответственно, а индекс s указывает на подкласс строгих эпи- или мономорфизмов.

Опираясь на теорему 2, можно построить категорию соответствий ***R-Mul***, а на теорему 3 – категорию ко-соответствий ***co-R-Mul*** над категорией мультимножеств. Таким образом, мы получаем два вложения категории мультимножеств в упорядоченные категории с инволюцией в качестве полной подкатегории функциональных морфизмов. В зависимости от выбора объемлющей категории мы получаем две версии отношений эквивалентности.

Начнем с отношений эквивалентности в категории соответствий ***R-Mul***. Рассмотрим соответствие $[p \setminus q]$, задаваемое дробью вида

$$p{:}(X,\rho) \leftarrow (U,\varphi) \to (X,\rho)\ {:}q \quad (3)$$

Без потери общности можно считать, что $U \subseteq X \times X$, а p и q – сужения проекций на U. Соответствие, задаваемое (3) является отношением эквивалентности, если выполняются следующие условия:

(E1) U – отношение эквивалентности на множестве X,

(E2) φ – отношение эквивалентности на множестве U,

(E3) если $(x,u)\varphi(v,y)$, то $x\rho v$ и $u\rho y$.

Для формулировки еще одного условия, потребуются дополнительные обозначения.

Положим

$$W = \{((x,u),(v,y)) \in U \times U \mid u = v\}$$

и обозначим через $h{:}W \to U$ проекцию, при которой $h((x,u),(u,y)) = (x,y)$. Пусть τ – отношение эквивалентности на W, полученное сужением $\varphi \times \varphi$. Тогда должно выполняться следующее соотношение

(E4) $\varphi = \tau / (h;h')$,

т.е., $\varphi = h';(\tau \vee h;h');h$.

Пусть $f{:}(X,\rho) \to (Y,\sigma)$ – морфизм в категории ***Mul***. Отношение эквивалентности на (X,ρ) вида $f;f'$ называется конгруэнцией. Если при этом f – строгий эпиморфизм, мультимножество (Y,σ) можно считать фактор-мультимножеством мультимножества X по конгруэнции $f;f'$, а f – факторным отображением. Конгруэнция может быть задана дробью вида (3), в которой $(x,u)\varphi(v,y)$ тогда и только тогда, когда $x\rho v$ и $u\rho y$.

Следующий простой пример показывает, что на мультимножествах имеются отношения эквивалентности, не являющиеся конгруэнциями.

Пример. Пусть $X = \{0,1\}$, отношение эквивалентности ρ связывает любую пару элементов X. Положим $U = X \times X$ и определим отношение эквивалентности φ на U так, что классами разбиения относительно φ являются $\{(0,0),(1,1)\}$ и $\{(0,1),(1,0)\}$. Роль p и q играют проекции U на первую и вторую компоненты. Полученное соответствие на мультимножестве (X,ρ) – отношение эквивалентности, которое не является конгруэнцией.

Замечание. Используя общую конструкцию, предложенную в [7] (см. также [3]), категорию соответствий ***R-Mul*** можно пополнить обобщенными факторобъектами так, что каждое отношение эквивалентности в пополненной категории будет конгруэнций. Идея такого пополнения восходит к [13].

Рассмотрим теперь отношения эквивалентности на мультимножествах в категории ко-соответствий. Заметим, что эта категория отличается от категории дробей и получается из нее «склеиванием» эквивалентных дробей (см. [4]). В категории ***co-R-Mul*** ко-соответствие из мультимножества (X,ρ) в мультимножество (Y,σ) задается парой отношений эквивалентности ε и φ на дизъюнктном объединении X и Y, которое мы будем обозначать $X[+]Y$. При этом φ должно обладать следующим свойством: $\varepsilon \vee \rho[+]\sigma \subseteq \varphi$, где $\rho[+]\sigma$ – дизъюнктное объединение отношений эквивалентности ρ и σ.

Ко-соответствие на (X,ρ) является отношением эквивалентности в ***co-R-Mul***, если дополнительно выполняются следующие условия. Пусть C – произвольный класс эквивалентности относительно ε или относительно φ. Тогда пересечение C с первой компонентной и со второй компонентой в дизъюнктном объединении $X[+]X$ совпадают и кроме того, конечно,

$$\varepsilon \vee \rho[+]\rho \subseteq \varphi. \tag{4}$$

Говоря неформально, отношение эквивалентности φ «нарезает» $X[+]X$ на полосы, а классы разбиения относительно ρ лежат целиком внутри этих полос. Если обозначить через ${}_X|\varphi$ сужение φ на первую компоненту, а через $\varphi|_X$ – на вторую и аналогично для ε, то в дополнение к (4) должны выполняться соотношения ${}_X|\varepsilon = \varepsilon|_X$ и ${}_X|\varphi = \varphi|_X$.

Всякое отношение эквивалентности в ***co-R-Mul*** является конгруэнцией. Фактор мультимножеством мультимножества (X,ρ) по отношению эквивалентности, заданному парой ε и φ, служит мультимножество $(X/(\varepsilon|_X), p';(\varphi|_X);p)$, где $p{:}X \to X/(\varepsilon|_X)$ – каноническая проекция.

V. Заключение

В работе описано строение строгих эпиморфизмов в категории мультимножеств. Доказано, что строгие эпиморфизмы устойчивы в декартовых квадратах, а строгие мономорфизмы – в ко-декартовых квадратах. С использованием этих результатов дано описание отношений эквивалентности на мультимножествах в категории соответствий и в категории ко-соответствий.

Список литературы

[1] Blizard W.D. The development of multiset theory // Modern Logic 1991. Vol. 1, no. 4. P. 319-352.

[2] Bryans J. Liew, L. S., Nguyen, H. N., Sabaliauskaite, G., & Shaikh, S. A. Formal Template-Based Generation of Attack–Defence Trees for Automated Security Analysis. // Information. 2023. Vol. 14 (481). p. 1-25.

[3] Calenko M.S., Gisin V.B., Raikov D.A. Ordered categories with involution // Dissertationes Mathematicae. Warszawa. 1984. Vol. CCXXVII, 112 p.

[4] Fong B., Zanasi F. Universal Constructions for (Co) Relations: categories, monoidal categories, and props // Logical Methods in Computer Science. 2018. T. 14 (3:14). pp. 1-25.

[5] Freyd P.J., Scedrov A. Categories, allegories. Elsevier, 1990. 300 p.

[6] Girish K.P., John S.J. Relations and functions in multiset context // Information sciences. 2009. Vol. 179, no. 6. P. 758-768.

[7] Гисин В.Б. Об одном классе бикатегорий // Доклады Академии наук. Российская академия наук, 1974. Т. 219, №. 6. С. 1298-1301.

[8] Huang D., Lin H., Li Z. Information structures in a multiset-valued information system with application to uncertainty measurement // Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2022. Vol. 43, no. 6. P. 7447-7469.

[9] Jacobs B. Multisets and distributions, in drawing and learning //Samson Abramsky on Logic and Structure in Computer Science and Beyond // Cham: Springer International Publishing, 2023. P. 1095-1146.

[10] Jürgensen H. Multisets, heaps, bags, families: What is a multiset? // Mathematical Structures in Computer Science. 2020. Vol. 30, no. 2. P. 139-158.

[11] Mauw S., Oostdijk M. Foundations of attack trees // Information Security and Cryptology-ICISC 2005: 8th International Conference, Seoul, Korea, December 1-2, 2005, Revised Selected Papers 8. Springer Berlin Heidelberg, 2006. P. 186-198.

[12] Monro G.P. The concept of multiset // Mathematical Logic Quarterly. 1987. Vol. 33, no. 2. P. 171-178.

[13] Виленкин Н.Я. Обобщенные нормальные делители топологических групп и их приложения к комбинаторной топологии // Труды Московского математического общества. 1954. Т. 3. С. 15-88.