

Моделирование состояния экосистемы с использованием стохастических возмущений на примере трехкомпонентной системы токсичного и нетоксичного фитопланктона

А. А. Щеголева

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

aleksandrasheg@yandex.ru

М. Д. Поляк

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

markpolyak@gmail.com

Аннотация. Данная статья представляет исследование моделирования взаимодействия между хищниками и жертвами на основе трехкомпонентной модели токсичного и нетоксичного фитопланктона и зоопланктона. В статье рассматривается принцип работы данной модели и ее применение для анализа динамики популяций в биологических системах с учетом стохастических помех окружающей среды. В быстро меняющемся мире, где изменения климата и вмешательство человека оказывают значительное влияние на экосистемы, понимание динамики популяций является ключевым фактором для сохранения биоразнообразия и эффективного управления природными ресурсами. Авторы предлагают рассмотреть трехкомпонентную модель как инструмент для анализа и прогнозирования изменений в экосистемах.

Ключевые слова: хищник-жертва; цветения фитопланктона; фитопланктон; зоопланктон; синергетическая теория управления

I. ВВЕДЕНИЕ

За последние десятилетия было предложено множество математических моделей [1–3] для анализа взаимодействия токсичных видов фитопланктона и зоопланктона. Однако все они применяются только для моделирования состояний без резких изменений в популяции одного из видов. Благодаря внедрению последних достижений синергетической теории управления стало возможным моделировать переход системы из одного устойчивого состояния в другой. Например, это может быть цветение определенных видов водорослей.

Цветение водорослей оказывает значительное влияние на водный объект. Плотные скопления водорослей могут приводить к снижению качества воды, угнетению других организмов и даже к разрушению экосистемы. Помимо этого, некоторые виды водорослей могут выделять токсические вещества, которые опасны для морской фауны.

II. БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ

В качестве базовой модели рассматривается трехкомпонентная модель токсичного и нетоксичного фитопланктона и зоопланктона [4–5]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + \alpha_1 P_2}{K_1} \right) - \frac{w_1 P_1 Z}{d_1 + P_1} \\ \frac{dP_2}{dt} &= r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2 + \alpha_2 P_1}{K_2} \right) - \frac{w_2 P_2 Z}{d_2 + b_1 P_2^2} \\ \frac{dZ}{dt} &= \frac{\gamma_1 P_1 Z}{d_1 + P_1} - \frac{\gamma_2 P_2 Z}{d_2 + b_1 P_2^2} - mZ - m_1 Z^2 \end{aligned} \quad (1)$$

где P_1, P_2, Z – нетоксичный фитопланктон, токсичный фитопланктон и зоопланктон соответственно.

Модель дает общее представление о процессах происходящих в водном объекте при взаимодействии разных видов фитопланктона и зоопланктона. В то же время в любой естественной среде присутствуют случайные процессы: резкие изменения погоды, техногенные процессы или деятельность человека, направленная на обитателей водной среды. Для отражения таких процессов в модель (1) добавляется аддитивный белый шум, сама модель переводится в дискретный вид согласно разностной схеме Эйлера. В итоге модель 1 принимает вид:

$$\begin{aligned} P_1(t+1) &= P_1(t) + \tau \left(r_1 P_1(t) \left(1 - \frac{P_1(t) + \alpha_1 P_2(t)}{K_1} \right) - \frac{w_1 P_1(t) Z(t)}{d_1 + P_1(t)} \right) \\ P_2(t+1) &= P_2(t) + \tau \left(r_2 P_2(t) \left(1 - \frac{P_2(t) + \alpha_2 P_1(t)}{K_2} \right) - \frac{w_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} \right) + \xi(t) + c\xi(t) \\ Z(t+1) &= Z(t) + \tau \left(\frac{\gamma_1 P_1(t) Z(t)}{d_1 + P_1(t)} - \frac{\gamma_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} - mZ(t) - m_1 Z^2(t) \right) \end{aligned}$$

где $\xi(t)$ – случайная величина, распределенная по нормальному закону и имеющая свойства: $M[\xi(t)] = 0, D[\xi(t)] = \sigma^2$. Параметр c – коэффициент затухания с возможным диапазоном значений $0 < c < 1$. Параметр τ – шаг дискретизации.

III. МОДЕЛЬ С УПРАВЛЕНИЕМ

В данном исследовании, важный акцент делается на применении нового метода синергетической теории управления для расширения существующих систем – алгоритм нелинейной стохастической адаптации (NAS-управление) [6–10]. Данный алгоритм является модификацией классического метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР). Основные шаги для применения NAS-управления:

- Перевод системы в дискретный вид, построение разностных схем.
- Определение дискретной макропеременной, содержащей цель управления.
- Определение условного математического ожидания от полученного регулятора управления.
- Поиск зависимости случайных шумов от значения макропеременной.

В качестве цели управления возьмем ситуацию, когда необходимо, чтобы популяция токсичного фитопланктона принимала и удерживала заданное значение. Формализуем такую цель управления: необходимо вывести закон управления для системы (1), который переводит начальное значение $P_2(0)$ к некоторому заданному значению P_2^* . Для этого введем макропеременную $\psi(t) = P_2(t) - P_2^* \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Введенная макропеременная должна доставлять минимум дискретному варианту оптимизирующего сопровождающего функционала качества:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^2 \psi^2(k) + (\Delta \psi(k))^2)$$

Для выполнения условия минимизации $\psi(t)$ должна быть устойчивым решением дискретного варианта уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала:

$$\psi(t+1) + T_1 \psi(t) = 0$$

Уравнение имеет устойчивое решение при $|T_1| < 1$. При решении (получается экстремаль, которая позволит описать фазовую траекторию для системы (1) с управлением. После постановки задачи управления нужно выполнить синтез управления для системы (1) по заданной макропеременной.

Регулятор управления при решении уравнения Эйлера–Лагранжа примет вид:

$$u(t) = \frac{-P_2(t) - \xi(t+1) - c\xi(t) + P_2^* - T_1 \psi(t)}{\tau} - \left(r_2 P_2(t) \left(1 - \frac{P_2(t) + \alpha_2 P_1(t)}{K_2} \right) - \frac{w_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} \right) \Big| \xi(t)$$

Сформируем итоговый вариант регулятора управления как условное математическое ожидание при фиксированных помехах:

$$u^{CE} = M[u | \xi(i)]; \quad \xi(i) = \xi(i+1) + \omega \xi(i)$$

$$u^{CE} = M \left[\frac{-P_2(t) - \xi(t+1) - c\xi(t) + P_2^* - T_1 \psi(t)}{\tau} - \left(r_2 P_2(t) \left(1 - \frac{P_2(t) + \alpha_2 P_1(t)}{K_2} \right) - \frac{w_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} \right) \Big| \xi(i) \right] =$$

$$= \frac{-P_2(t) - c\xi(t) + P_2^* - T_1 \psi(t)}{\tau} - \left(r_2 P_2(t) \left(1 - \frac{P_2(t) + \alpha_2 P_1(t)}{K_2} \right) - \frac{w_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} \right)$$

После переопределения $\xi(t)$ получим следующий регулятор управления:

$$u(t) = \frac{-P_2(t) - c(\psi(t) + T_1 \psi(t-1)) + P_2^* - T_1 \psi(t)}{\tau} - \left(r_2 P_2(t) \left(1 - \frac{P_2(t) + \alpha_2 P_1(t)}{K_2} \right) - \frac{w_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} \right)$$

Итоговый вид полученной системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(t+1) = P_1(t) + \tau \left(r_1 P_1(t) \left(1 - \frac{P_1(t) + \alpha_1 P_2(t)}{K_1} \right) - \frac{w_1 P_1(t) Z(t)}{d_1 + P_1(t)} \right) \\ P_2(t+1) = P_2(t) + \tau \left(r_2 P_2(t) \left(1 - \frac{P_2(t) + \alpha_2 P_1(t)}{K_2} \right) - \frac{w_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} \right) \\ Z(t+1) = Z(t) + \tau \left(\frac{\gamma_1 P_1(t) Z(t)}{d_1 + P_1(t)} - \frac{\gamma_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} - mZ(t) - m_1 Z^2(t) \right) \\ \psi(t) = P_2(t) - P_2^* \\ u(t) = \frac{-P_2(t) - c(\psi(t) + T_1 \psi(t-1)) + P_2^* - T_1 \psi(t)}{\tau} - \left(r_2 P_2(t) \left(1 - \frac{P_2(t) + \alpha_2 P_1(t)}{K_2} \right) - \frac{w_2 P_2(t) Z(t)}{d_2 + b_1 P_2^2(t)} \right) \\ \xi \square N(0, \delta^2) \end{array} \right. + \tau u(t) + \xi(t+1) + c\xi(t) \quad (2)$$

IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для компьютерного моделирования использовался следующий набор коэффициентов:

$$r_1 = 0.4632, r_2 = 0.4425, \alpha_1 = 0.002, \alpha_2 = 0.001,$$

$$K_1 = 505, K_2 = 505, w_1 = 0.6625, w_2 = 0.435,$$

$$d_1 = 45, d_2 = 30, \gamma_1 = 0.516, \gamma_2 = 0.45,$$

$$b_1 = 0.49, m = 0.309, m_1 = 0.001$$

Приведем два примера использования полученной модели (2): при нарастании цветения и спаде цветения.

Результаты моделирования на рис. 1–2 показывают, что обе системы устойчивы, цель достигается, несмотря на шум. Колебания популяции, создаваемые шумом,

успешно корректируются выведенным регулятором управления.

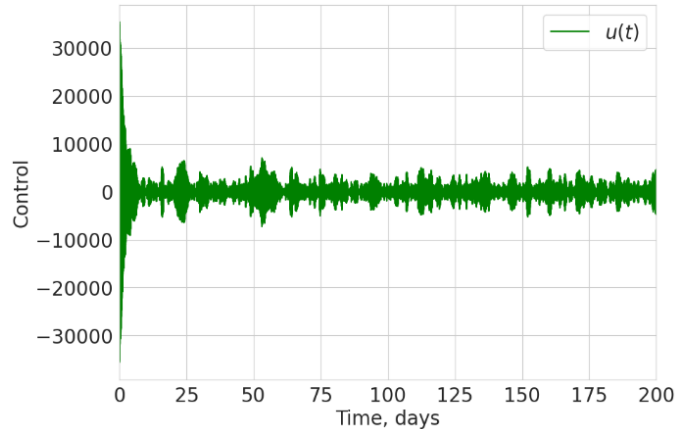
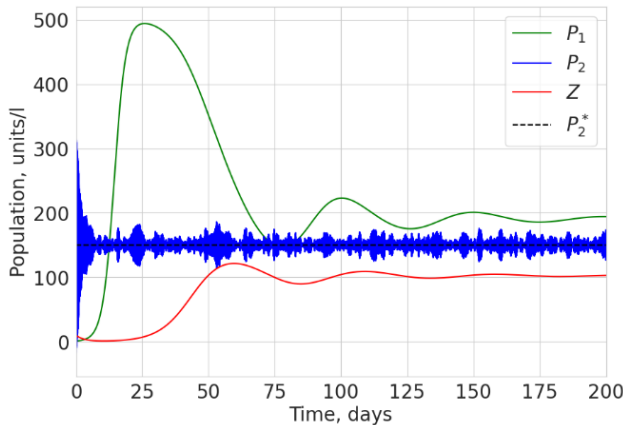


Рис. 1. Нарастание цветения. Параметры $P_1(0) = 1, P_2(0) = 1, Z(0) = 10, c = 0.1, \sigma = 1, \tau = 0.01, P_2^* = 150, T_1 = 0.995$

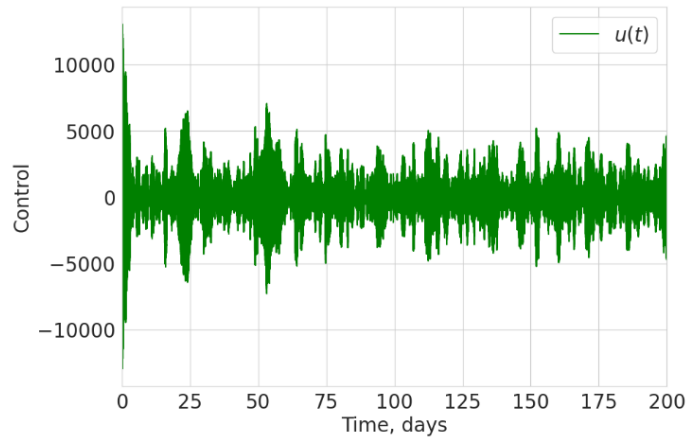
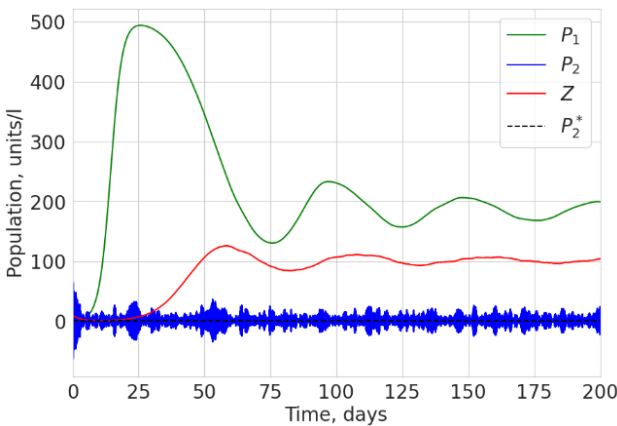


Рис. 2. Спад цветения. Параметры $P_1(0) = 1, P_2(0) = 50, Z(0) = 10, c = 0.9, \sigma = 1, \tau = 0.01, P_2^* = 1, T_1 = 0.995$

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили и исследовали модель управления для цветения водорослей, использующую регулятор управления, который позволяет переводить систему в целевое многообразие в условиях постоянных помех. В качестве постоянного шума использовался белый шум. Белый шум позволяет включать случайные колебания и помехи в модели, что позволяет учесть непредсказуемые факторы и улучшить точность прогнозирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Chattopadhyay J., Sarkar R. Toxin-producing Plankton May Act as a Biological Control for Planktonic Blooms – Field Study and Mathematical Modelling // *Journal of Theoretical Biology*. 2002. № 215 (3). P. 333–344.
[2] Franks P.J.S. NPZ models of plankton dynamics: their construction, coupling to physics, and application // *Journal of Oceanography*. 2002. № 58, С. 379–387.
[3] Chattopadhyay J., Pal S. Viral infection on phytoplankton–zooplankton system – a mathematical model // *Ecological Modelling*. 2002. № 151(1). С. 15–28.

[4] Chakraborty S., Bhattacharya S., Feudel U., Chattopadhyay J. The role of avoidance by zooplankton for survival and dominance of toxic phytoplankton // *Ecological Complexity*. 2012. Т.11. С.144–153. DOI:10.1016/j.ecocom.2012.05.006.
[5] Thakur N.K., Singh R., Ojha A. Dynamical study of harmful algal bloom in Sundarban mangrove wetland with spatial interaction and competing effects // *Modeling Earth Systems and Environment*. 2022. Т.8. С.555–577. DOI:10.1007/s40808-021-01088-6.
[6] Колесников А. А. Синергетика и проблемы теории управления. М: ФизМатЛит, 2004. 504 с.
[7] Колесников А.А., Кузьменко А.А. Методы АКАР и АКОР в задачах синтеза нелинейных систем управления // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. № 10. С. 657–669.
[8] Колесникова С.И. Синтез управления нелинейным объектом второго порядка с неполным описанием // *Автоматика и телемеханика*. 2018. № 9. С. 18–30.
[9] Kolesnikova S.I. Application of regression in algorithm of nonlinear stochastic adaptation of unstable multidimensional objects // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 2099. No. 1. С. 012064.
[10] Kolesnikov A., Kolesnikova S. Synthesis Algorithm for a Continuous Robust Regulator on a Manifold for a Manipulator under Non-Random Noise Conditions // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), 2020.