

Применение методов синергетического синтеза к управлению экосистемой водного объекта

Е. Г. Кострыгина

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

keg03@mail.ru

М. Д. Поляк

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

markpolyak@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматривается взаимодействие хищников и жертв в виде классической модели Лотки–Вольтерры. В качестве примера анализируется водная экосистема, включающая в себя зоопланктон и фитопланктон, где зоопланктон является хищником и поедает жертву – фитопланктон. Основное внимание уделено управлению системой с использованием метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР). В настоящее время управление состоянием водного объекта может стать ключевым фактором для поддержания баланса среды обитания многих видов существ. Предлагается метод управления системой, позволяющий достичь необходимой численности популяций и стабилизировать систему.

Ключевые слова: хищник-жертва, система Лотки–Вольтерра, метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), экосистема, фитопланктон, зоопланктон

I. ВВЕДЕНИЕ

Главным источником кислорода является фитопланктон – он производит 50–85 % кислорода на Земле и является основой пищевой цепочки. Зоопланктон в свою очередь, является пищей для огромного числа существ. Несмотря на пользу этих микроорганизмов, отсутствие баланса между ними может повлечь за собой необратимый ущерб, например вызывать цветение водоемов – процесс, который вызывает губительные последствия не только для человека, ввиду того, что вода становится непригодной для питья, но и для всех существ, живущих в водоеме: рыбам и микроорганизмам не хватает растворенного в воде кислорода, что может привести к их гибели, а в перспективе и стать причиной дестабилизации экосистемы.

В работе исследуется динамика взаимодействия популяций на основе классической модели Лотки–Вольтерры. Цель управления заключается в достижении заданной численности популяции одного из видов или поддержания постоянной пропорции между популяциями, что позволяет избежать вымирания жертв или хищников. Для анализа динамики популяций применялись дифференциальные уравнения и метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР). Исследование может быть полезно для биомониторинга и управления водной экосистемой.

II. БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ

В качестве базовой модели без управления использовалась классическая модель Лотки–Вольтерры:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 \end{cases},$$

где: $x_1(t)$ – численность популяции жертв; $x_2(t)$ – численность популяции хищников; α_1 – коэффициент рождаемости жертв; β_1 – коэффициент интенсивности хищничества; α_2 – коэффициент смертности хищников;

β_2 – коэффициент рождаемости хищников; $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ – скорости прироста популяций.

Правила модели, следующие:

- Число хищников полностью зависит от числа жертв.
- Темп изменения численности каждой популяции пропорционален либо её собственной численности, либо произведению численностей обеих популяций.
- Обе популяции можно описать одной переменной (популяции не имеют пространственного или возрастного распределения, влияющего на динамику).
- У жертв всегда в избытке пища.
- Хищники обладают безграничным аппетитом.
- В процессе изучения окружающая среда не меняется в пользу одного вида, а генетическая адаптация не имеет значения [1–3].

Данная модель дает обобщенное представление о взаимодействии хищников и жертв в ограниченной экологической среде с определенными условностями. Несмотря на это, модель является базовой, служит фундаментом для более сложных систем и позволяет наглядно увидеть динамику влияния одного вида на другой.

III. МОДЕЛЬ С УПРАВЛЕНИЕМ

При построении управления использовался метод АКАР. Постановка задачи метода АКАР следующая: требуется определить такой вектор управления $u = u(x)$, который обеспечивает перевод изображающей точки (ИТ) объекта (цели) из произвольного исходного состояния (в некоторой допустимой области) сначала на многообразия $\psi_k(x) = 0$, а затем движение вдоль них в заданное состояние (в частности, в начало координат). При этом движение ИТ обязательно должно удовлетворять системе основных функциональных уравнений метода АКАР:

$$T_k \dot{\psi}_k + \phi_k(\psi_k) = 0 \quad (1)$$

Функции $\phi_k(\psi_k)$ выбираются таким образом, чтобы помимо асимптотической устойчивости обеспечить желаемые показатели качества движения ИТ к притягивающим многообразиям $\psi_k(x) = 0$. В простейшем случае (когда управление задается по той же переменной, что и цель) $\phi_k(\psi_k) = \psi_k$.

Эти функции (1) являются уравнением Эйлера-Лагранжа для следующего обобщенного сопровождающего функционала (ОСФ) [4–6]:

$$\Phi = \int_0^\infty (\dot{\phi}_k^2(\psi_k) + T^2 \dot{\psi}_k^2(t)) dt \rightarrow \min$$

Найдем управление в общем виде для системы (2):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 + U(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) + U(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2)$$

Цель:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= x_1(t) - x_1^*(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \\ (x_1^*(t) &= x_1^* = \text{const}) \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (2) предполагается следующее: $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ – коэффициенты взаимодействия фитопланктона x_1 и зоопланктона x_2 . Анализируется следующая ситуация: цель задается по фитопланктону, так как он является основой пищевой цепи и напрямую влияет на факт цветения воды; управление вводится по зоопланктону. Подразумевается, что управление является вмешательством со стороны, внешним воздействием. Например, таким воздействием может быть добавление в воду определенного вида токсина в необходимой концентрации для контролируемого уменьшения популяции [7–10].

В связи с тем, что управление и цель задаются по разным переменным, необходимо ввести макропеременную:

$$\psi_2(t) = \psi_2 = x_2 - \phi(x_1) = 0$$

Тогда ОСФ примет следующий вид:

$$\Phi = \int_0^\infty (\dot{\psi}_2^2(t) + T^2 \dot{\psi}_2^2(t)) dt \rightarrow \min$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$T_1 \dot{\psi}_2 + \psi_2 = 0$$

$$\dot{\psi}_2 = (x_2 - \phi(x_1))' = \frac{dx_2}{dt} - \dot{\phi}(x_1)$$

Подставим производную в уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$T_1 \left(\frac{dx_2}{dt} - \dot{\phi}(x_1) \right) + \psi_2 = 0$$

$$T_1 (f_2(x_1, x_2) + U(x_1, x_2) - \dot{\phi}(x_1)) + \psi_2 = 0$$

$$T_1 f_2(x_1, x_2) + T_1 U(x_1, x_2) - T_1 \dot{\phi}(x_1) + \psi_2 = 0$$

$$U(x_1, x_2) = U = \frac{T_1 \dot{\phi}(x_1) - T_1 f_1(x_1, x_2) - \psi_2}{T_1}$$

Рассмотрим граничный случай:

$$\psi_2(t) = x_2 - \phi(x_1) = 0, \text{ т. е. } x_2 = \phi(x_1). \text{ Тогда}$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \phi(x_1)) = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 \phi(x_1).$$

Решим вариационную задачу относительно поставленной цели (3):

$$\text{Уравнение Эйлера–Лагранжа: } T_2 \dot{\psi}_1 + \psi_1 = 0$$

$$T_2 (x_1 - x_1^*)' + \psi_1 = 0$$

$$T_2 \alpha_1 x_1 - T_2 \beta_1 x_1 \phi(x_1) + \psi_1 = 0$$

$$\phi(x_1) = \frac{T_2 \alpha_1 x_1 + \psi_1}{T_2 \beta_1 x_1} = \frac{T_2 \alpha_1 x_1 + x_1 - x_1^*}{T_2 \beta_1 x_1} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{1}{T_2 \beta_1} - \frac{x_1^*}{T_2 \beta_1 x_1}$$

$$\dot{\phi}(x_1) = 0 + 0 - \frac{d\phi}{dx_1} \cdot \dot{x}_1 = -\frac{x_1^*}{T_2 \beta_1} \cdot (x_1^{-1})' \cdot f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^*}{T_2 \beta_1 x_1^2} f_1(x_1, x_2)$$

Итого:

$$\phi(x_1) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{1}{T_2 \beta_1} - \frac{x_1^*}{T_2 \beta_1 x_1}$$

$$\dot{\phi}(x_1) = \frac{x_1^*}{T_2 \beta_1 x_1^2} f_1(x_1, x_2)$$

Теперь управление полностью выражено с помощью известных параметров системы.

Найдем стационарные точки системы (2):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 + U(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 = 0$$

$$x_1(\alpha_1 - \beta_1 x_2) = 0$$

Получаем два возможных случая:

$x_1 = 0$: вымирание популяции x_1 , этот случай не представляет интереса для анализа.

$$\alpha_1 - \beta_1 x_2 = 0, \text{ откуда следует, что } x_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

То есть при применении управления, когда система приходит в некоторое равновесие (переменные колеблются вокруг некоторых постоянных значений), значение x_2 будет зависеть от параметров α_1, β_1 .

Теперь рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 + U(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ -\alpha_2 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \beta_2 x_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + U(x_1, \frac{\alpha_1}{\beta_1}) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (4):

$$-\alpha_2 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \beta_2 x_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + U(x_1, \frac{\alpha_1}{\beta_1}) = 0$$

$$-\alpha_2 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \beta_2 x_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \alpha_2 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \beta_2 x_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \dot{\phi}(x_1) - \frac{\psi_2}{T_1} = 0$$

$$\dot{\phi}(x) + \frac{\psi_2}{T_1} = 0$$

$$\frac{x_1^*}{T_2 \beta_1 x_1^2} \cdot (\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1}) + \frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{1}{T_2 \beta_1} + \frac{x_1^*}{T_2 \beta_1 x_1}}{T_1} = 0$$

$$\frac{x_1^*}{T_1 T_2 \beta_1 x_1} = \frac{1}{T_1 T_2 \beta_1}$$

$$T_1 T_2 \beta_1 x_1^* = T_1 T_2 \beta_1 x_1$$

$$x_1 = x_1^*$$

Имеем следующую устойчивую стационарную точку:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^* \\ x_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \end{cases} \quad (5)$$

Данный результат подтверждает, что построенное АКАР управление переводит модель (2) в целевое состояние (3).

IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ

При моделировании использовались возможности языка программирования Python. Были подобраны

следующие параметры системы: $\alpha_1 = 2$; $\beta_1 = 1$; $\alpha_2 = 1.5$; $\beta_2 = 1.5$; $T_1 = 2$; $T_2 = 1$; $x_1^* = 1$; $x_1(0) = 11$; $x_2(0) = 6$.

Рассмотрим сперва моделирование системы без управления.

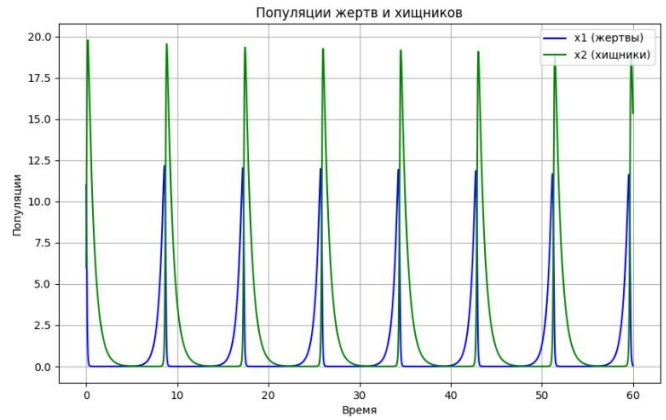


Рис. 1. Популяции жертв и хищников без управления

На рис.1 видно, что без управления система находится в циклическом состоянии: в начальный момент времени хищников меньше, в связи с чем, увеличивается популяция жертв – чем больше жертв, тем доступнее пища для хищников. Популяция x_2 начинает активно поедать жертв, что приводит к снижению популяции x_1 . Из-за уменьшения доступности пищи снижается численность хищников, что в свою очередь позволяет вновь увеличиться популяции жертв.

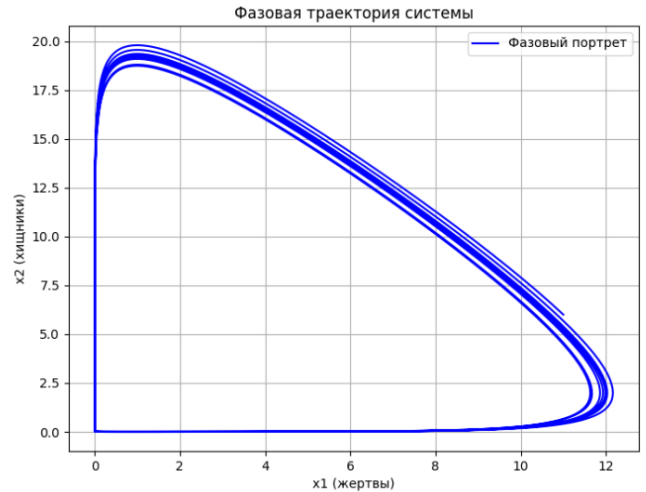


Рис. 2. Фазовая траектория системы без управления

Фазовая траектория системы вновь говорит нам о цикличности системы без управления: численности жертв и хищников будут бесконечно колебаться вокруг некоторого среднего значения.

Далее моделируем систему с управлением.

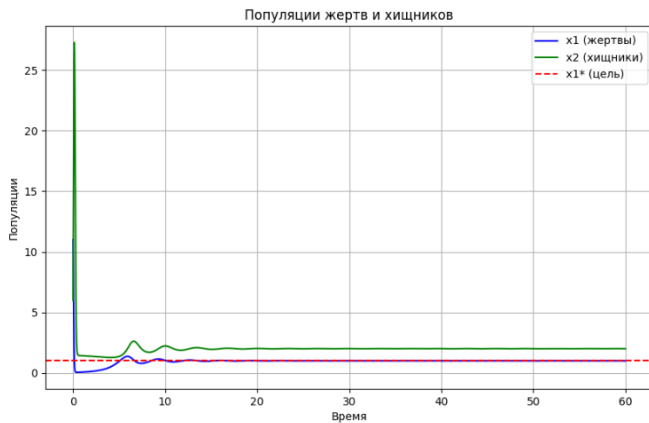


Рис. 3. Популяции жертв и хищников с управлением

На рис. 3 наблюдается следующий результат: в начале наблюдения в популяциях происходят всплески, но через некоторое время количество жертв приходит к целевому значению. Количество хищников также стабильно колеблется около единственного значения на оставшемся времени наблюдения.

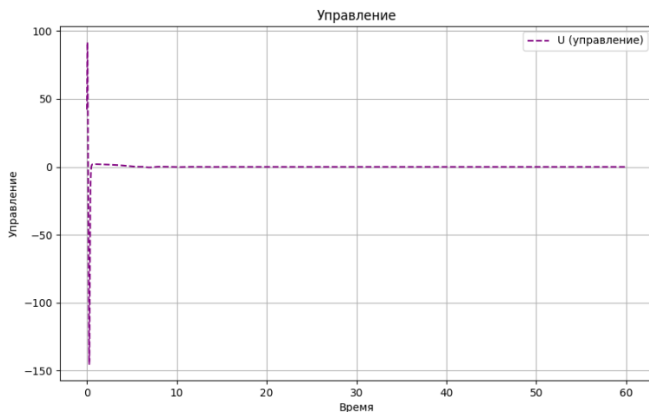


Рис. 4. Влияние управления на систему

Рис. 4 демонстрирует как ведет себя управление на наблюдаемом промежутке времени. Как и на рис. 3 в начале наблюдения происходят всплески – положительное управление показывает, что в систему добавляется ресурс извне, который способствует увеличению численности хищников, это может быть внешний источник пищи для них или добавление извне некоторого количества фитопланктона. Отрицательные значения управления, в свою очередь, сообщают об уменьшении количества хищников в связи с внешним влиянием, например добавлением определенной дозы токсина в воду для уменьшения популяции.

В результате управление приходит к значению, которое близко к нулю. Это показывает, что целевое состояние является устойчивым и перейдя в него система может оставаться в нем без дополнительного внешнего воздействия.

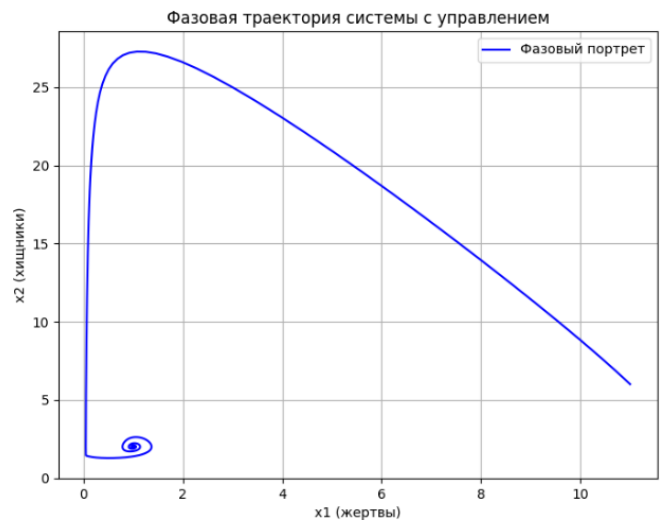


Рис. 5. Фазовая траектория системы с управлением

На рис. 5 фазовая траектория системы с управлением представляет из себя спираль, которая закручивается в точке с координатами, которые представляют собой целевое значение (x_1^*) и значение, к которому приходит популяция хищников, соответственно. Причем количество хищников определяется исходя из значений коэффициентов α_1 и β_1 по формуле (5).

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализирована классическая модель Лотки-Вольтерры с управлением, целью которого было достижение жертвами целевого значения и поддержание баланса между жертвами и хищниками. Модель рассмотрена на примере взаимодействия фитопланктона и зоопланктона в водной экосистеме. Полученные результаты позволяют прогнозировать поведение модели, учитывая внешнее влияние управления на среду обитания или количество особей в популяции. В ходе численного моделирования получены следующие значения: $x_1 = 1.004$, $x_2 = 2.002$, $U = 0.001$. Рассчитанные значения x_1 и x_2 соответствуют результатам, вычисленным по аналитическим формулам с минимальными погрешностями 0.004 и 0.002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лотка А.Дж. Элементы физической биологии. Балтимор: Williams & Wilkins, 1925. 460 с. URL: <https://archive.org/details/elementsofphysic017171mbp/mode/2up>
- [2] Вольтерра В. Вариации и флуктуации численности видов животных, рассматриваемые математически // Memorie della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. 1926. Т. 2. С. 31–113.
- [3] Lotka–Volterra equations [Электронный ресурс] // Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations
- [4] Колесников А.А. Синергетика и проблемы теории управления. М: ФизМатЛит, 2004. 504 с.
- [5] Колесников А.А., Колесников А.А., Кузьменко А.А. Методы АКАР и АКОР в задачах синтеза нелинейных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016;17(10):657–669. <https://doi.org/10.17587/mau.17.657-669>

- [6] Колесников А.А., Колесников А.А., Кузьменко А.А. Метод АКАР и теория адаптивного управления в задачах синтеза нелинейных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017;18(9):579-589. <https://doi.org/10.17587/mau.18.579-589>
- [7] Л.Г. Корнева, А.Н. Шаров, С.И. Сиделев, А.А. Зубишина, Н.Г. Медведева, Г.А. Лазарева. «Цветение» воды цианобактериями и методы борьбы с их массовым развитием: учебное пособие. Дубна: Гос. ун-т «Дубна», 2023. 258, [2] с. ISBN 978-5-89847-695-3
- [8] Конструирование управления для бионинженерных систем / С.И. Колесникова, А.А. Фоменкова, М.Д. Поляк [и др.]. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2024. 176 с. DOI 10.31799/978-5-8088-1995-5-2024.
- [9] Поляк М.Д. Применение метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов к модели производящего токсина фитопланктона / М.Д. Поляк, А.А. Щеголева // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. 2023. Т. 1. С. 401-405.
- [10] Щеголева А.А. Модель "хищник-жертва с питанием" / А.А. Щеголева, М.Д. Поляк // Обработка, передача и защита информации в компьютерных системах '21: Международная научная конференция: сборник докладов, Санкт-Петербург, 14–22 апреля 2021 года. Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2021. С. 86-91. DOI 10.31799/978-5-8088-1557-5-2021-86-91.