Мультипликативная расширенная фильтрация Калмана на основе двойных кватернионов (DQ-MEKF) для относительной навигации в небольших группах взаимодействующих объектов

Ж. Б. Нгуа Ндонг Авеле

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

avelejacques@yahoo.fr

В. К. Орлов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

vkorlov@etu.ru

Аннотация. **Наш проект направлен на разработку вычислительно эффективной математической структуры для одновременной оценки ориентации и трансляции для кластера из трёх космических аппаратов PocketQube. Используя двойственную кватернионную алгебру, наши исследования объединяют вращательную и трансляционную кинематику в единую алгебраическую структуру, снижая сложность, присущую традиционным методам развязанной фильтрации. Первая задача заключается в выводе уравнений переходов состояний для трёх взаимодействующих PocketQube, фиксируя связанную динамику, необходимую для точного полёта в построении. Вторая задача сосредоточена на преобразовании этой математической основы в функциональную среду моделирования: S-функции MATLAB и аэрокосмический блоксет. Исследование подтверждает эффективность фильтра посредством строгого численного анализа, в частности изучения сходимости ошибки оценки в пределах трёхсигмных границ как по ориентации, так и для положения. Кроме того, стабильность формирования из трёх объектов визуализируется через трёхмерные траектории в системе Локально-Вертикальная Локально-Горизонтальная (LVLH) и мониторинг нормы двойного кватерниона, обеспечивая математическую целостность на протяжении всего профиля миссии. Результаты численного моделирования демонстрируют высокую точность оценки и согласованность фильтров, а мультипликативный расширенный фильтр Калмана (MEKF) успешно поддерживал ограничение единичной нормы двойственных кватернионов, что подтверждается графиками стабильности норм.**

Ключевые слова: кинематика двойных кватернионов, мультипликативный расширенный фильтр Калмана (MEKF), относительная навигация, спутниковое созвездие PocketQube, оценка состояния SE (3), аэрокосмическое моделирование в MATLAB/Simulink

I. Введение

Оценка относительной позы, включающей как трёхмерное вращение, так и трансляцию, является необходимым требованием для управления координатами маломасштабных взаимодействующих объектов, таких как относительная навигация PocketQubes. Традиционные навигационные фильтры часто рассматривают ориентацию и положение как отдельные объекты, обычно используя единичные кватернионы для вращения и декартовые векторы для трансляции. Однако такое разделение может привести к кинематическим несоответствиям и увеличению вычислительной нагрузки во время высокодинамических манёвров. Для преодоления этих ограничений современные аэрокосмические и робототехнические исследования всё чаще обращаются к двойным кватернионам — математической системе, обеспечивающей единое и компактное представление движения жестких в группе $SE(3)$ [1].

Мультипликативный расширенный фильтр Калмана (MEKF) представляет собой сложную эволюцию стандартного расширенного фильтра Калмана (EKF), специально разработанного для сохранения геометрической целостности пространства состояний. В двойном кватернионном MEKF глобальная поза не обновляется простым сложением векторов, что нарушает унитарное нормное ограничение, необходимое для действительного двойственного кватерниона. Поэтому используется мультипликативная формулировка состояния ошибки. Этот подход разделяет вещественное состояние на высокоточную номинальную оценку и состояние с низкой ошибкой сигнала, определённое в локальной алгебре Ли. Линеаризируя только малый угол и небольшие ошибки трансляции, MEKF избегает особенностей и фиксации гимбала, связанных с углами Эйлера, при этом обеспечивая при этом превосходящую численность по сравнению с аддитивными фильтрами. [1].

Процесс реализации двухкватернионного MEKF для относительной навигации начинается с шага прогнозирования, при котором номинальный двойственный кватернион распространяется с помощью инерциального измерения, затем следует этап коррекции, при котором наблюдения датчиков используются для оценки вектора ошибки малого угла и малого сдвига. Этот вектор ошибки преобразуется обратно в дуальный кватернион ошибки и применяется к номинальному состоянию посредством умножения на дуальные кватернионы. [1].

II. Материалы и методы

A. *Математическая формулировка расширенного фильтра Калмана (EKF) на основе подхода двойственных кватернионов*

Двойственный кватернион $\hat{q}$ определяется как сумма двух кватернионов, и он задаётся как $\hat{q} = q_r + \varepsilon q_d$, где q_r — вещественная часть, представляющая движение вращения, q_d — двойственная часть, представляющая движение сведения , а ε — двойственная единица, такой, что $\varepsilon^2 = 0$. Связь между двойственной частью и вектором трансляции r задаётся как $q_d = \frac{1}{2} r \otimes q_r$. Ограничение единичного двойственного кватерниона выражается как $\hat{q} \otimes \hat{q}^* = 1$, что подразумевает в целом $q_r \cdot q_r = 1$ и $q_r \cdot q_d = 0$ [2].

Для основного PQ_1 PocketQube вектор состояния x_1 обычно включает двойственный кватернион, обозначающий его инерционную позу и двойственную скорость. Двойственная скорость $\hat{\omega}$ часто определяется как $\hat{\omega} = \omega + \varepsilon\left(r + \omega \times r\right)$, где ω — угловая скорость. Кинематическое уравнение для PQ_1 is $\dot{\hat{q}}_1 = \frac{1}{2}\hat{q}_1 \otimes \hat{\omega}_1$ и его вектора в методах расширенного фильтра Калмана определяется как $x_1 = \begin{bmatrix} \hat{q}_1^T & \hat{\omega}_1^T \end{bmatrix}^T$, где $\hat{\omega}_1$ включает угловую ω_1 скорость и линейную v_1 скорость. Относительная навигация определяет позу и PQ_2 PQ_3 относительно PQ_1 [2].

Пусть $\hat{q}_{13}$ — относительный двойственный кватернион из PQ_1 в PQ_3. Относительная кинематика задаётся как $\dot{\hat{q}}_{12} = \frac{1}{2}\left(\hat{\omega}_2 \otimes \hat{q}_{12} - \hat{q}_{12} \otimes \hat{\omega}_1\right)$, что является взаимосвязью между PQ_1 и PQ_2 , а $\dot{\hat{q}}_{13} = \frac{1}{2}\left(\hat{\omega}_3 \otimes \hat{q}_{13} - \hat{q}_{13} \otimes \hat{\omega}_1\right)$ — взаимосвязью между PQ_1 и PQ_3 . В взаимодействующем кластере вектор относительного x_{rel} состояния равен $x_{rel} = \begin{bmatrix} \delta\hat{q}_{12}^T & \delta\hat{\omega}_{12}^T & \delta\hat{q}_{13}^T & \delta\hat{\omega}_{13}^T \end{bmatrix}^T$, где $\delta\hat{q}$ представляет собой дуальный кватернион ошибки, используемый в методах расширенного фильтра Калмана для поддержания единичного ограничения [2].

Расширенный фильтр Калмана проходит через фазы и прогнозирование. Для трёх взаимодействующих PocketQube глобальное состояние X объединяет абсолютное состояние PQ_1 и относительные состояния и PQ_2 PQ_3 . Состояние распространяется с помощью нелинейной динамики, и оно задаётся как $\hat{X}_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1}$, где F обычно является частной производной динамики двойственных кватернионов относительно состояния [2].

Измерения для PocketQube часто осуществляются с помощью межспутниковых связей. Измерение z относительной позы выражается как $z_{12} = h\left(\hat{q}_{12}\right) + v$. Инновация y предоставляется г $y_k = z_k - h\left(x_{k|k-1}\right)$. Прирост K и обновление Калмана — $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k} + K_k y_k$, $P_{k|k} = \left(1 - K_k H_k\right) P_{k|k-1}$ и $K_k = P_{k|k-1} H_k^T \left(H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k\right)^{-1}$ [2].

Поскольку PocketQube взаимодействуют с помощью электромагнитных сил и общих ограничений связи, ускорение PQ_2 иногда зависит от состояния PQ_1 , и PQ_3 . Двойственная сила, $\hat{F}$ действующая на каждое тело, равна $\hat{F} = F + \varepsilon\tau$, где F — вектор силы, а τ — крутящий момент. Уравнения двойственного импульса для трёх тел связаны относительным расстоянием и ориентациями, выраженными в двойственных кватернионных ошибочных состояниях. Таким образом, для PQ_2 PQ_1 относительно, динамика ошибок $\delta\dot{\hat{q}}_{12}$ включает перекрёстное произведение двойственных скоростей и выражается как $\delta\dot{\hat{q}}_{12} \approx \frac{1}{2}\delta\hat{q}_{12} \otimes \hat{\omega}_{12}^{ref}$ [2].

Эта формулировка гарантирует, что методы расширенного фильтра Калмана следуют относительному движению в 6 степенях свободы, учитывая мелкомасштабные возмущения, типичные для среды низкой околоземной орбиты (LEO), где работают PocketQube [2].

B. *Математическая формулировка мультипликативного расширенного фильтра Калмана (MEKF) на основе подхода с двойным кватернионным подходом*

В отличие от стандартного расширенного фильтра Калмана (EKF), который предполагает, что ошибки состояния могут быть представлены простым сложением векторов, мультипликативный расширенный фильтр Кальмана (MEKF) признаёт, что добавление возмущения к единичному кватерниону нарушает ограничение единичной нормы. Вместо этого MEKF представляет отношение как комбинацию оценки глобального единичного кватерниона и локального трёхкомпонентного вектора ошибки [3].

Сохраняя опорный кватернион $\hat{q}$, который отслеживает ориентацию, а ковариация и коэффициент усиления Калмана рассчитываются на основе минимального представления ошибки ориентации, обычно обозначаемой δθ как . Но этот вектор ошибки связан с истинным кватернионом q через мультипликативную $q = \delta q\left(\delta\theta\right) \otimes \hat{q}$ композицию . В этом подходе вектор состояния делится на неаддитивную часть, то есть кватернион, и на аддитивные компоненты, такие как гироскопические смещения. Как объяснялось в предыдущем разделе, истинный кватернион q представлен как произведение кватерниона ошибки δq и оценённого кватерниона $\hat{q}$, и задаётся $q = \delta q \otimes \hat{q}$ как . В этом случае для малых ошибок кватернион ошибки, аппроксимированный с помощью трёхмерного вектора ошибки $\delta\theta$, будет выражен как $\delta q \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\theta \\ 1 \end{bmatrix}$. Вектор состояния для одного PocketQube обычно включает положение и смещение гироскопа β, задаётся как $x = \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$, и $\Delta x = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$ [3].

В этом подходе оценка кватернионов не распространяется только с использованием измеренной угловой скорости ω_m, а корректируется оцененным смещением $\hat{\beta}$, и задаётся как $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\Omega(\hat{\omega})\hat{q}$, $\hat{\omega} = \omega_m - \hat{\beta}$. Ковариация ошибки P распространяется с помощью якобиана F и задаётся как $\dot{P} = FP + PF^T + GQG^T$, где F в связи с смещением выражается как $F = \begin{bmatrix} -[\hat{\omega}\times] & -I_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}$ [3].

При получении векторного измерения b от солнечного датчика и магнитометра остаточный размер y выражается как $y = b - A(\hat{q})r$, где $A(\hat{q})$ — матрица вращения r — опорный вектор. Таким образом, состояние обновляется как $\Delta x = Ky$, а кватернион затем умножается как $\hat{q}_{new} = \delta q(\delta\theta) \otimes \hat{q}_{old}$ [3].

Как объяснялось в предыдущем разделе, для взаимодействующих PocketQubes двойственный кватернионный фреймворк превосходит, поскольку он охватывает и трансляцию, и вращение в одной 8-одиночной математической структуре и выражен как $Q = q + \varepsilon q_d$, где $\varepsilon^2 = 0$.

В образовании из трёх карманных кубов PQ_1, PQ_2, PQ_3 и, относительная позиция PQ_2 к PQ_1, $Q_{2/1}$ кинематика будет выражена как $\dot{Q}_{2/1} = \frac{1}{2} Q_{2/1} \otimes \omega^b_{2/1}$, где $\omega^b_{2/1}$ — двойственная скорость, такая как линейная и угловая скорость [3].

Чтобы определить состояния на основе абсолютных и относительных поз, PQ_1 сохраняет свою абсолютную позу Q_1 относительно инерциальной системы $\Im$ и задаётся $x_1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}$ как . Состояние δx_1 ошибки использует мультипликативную ошибку для двойственного кватерниона и может быть выражено как $Q_1 = \hat{Q}_1 \otimes \delta Q_1(\delta s_1)$, где δs_1 — 6-элементный двойственный вектор, например 3 для вращения и 3 для трансляции [7].

Относительные состояния $Q_{2/1}$ и $Q_{3/2}$, по оценкам, сохраняют формацию. Мультипликативный расширенный фильтр Калмана для PQ_2 относительно использует PQ_1 следующую модель измерения: $z_{2/1} = h\left(Q_{2/1}\right) + n$ а инновация для относительной позы задаётся [$y_{2/1} = vec\left(Log\left(\hat{Q}_{2/1} \otimes Q_{2/1,means}\right)\right)$ 3].

В целом, для трёх взаимодействующих PocketQube каждый i PocketQube обновляет свою оценку $\hat{x}_i$, относительное предсказание с использованием мультипликативного расширенного фильтра Калмана на основе двойственного кватернионного подхода можно в целом выразить как $\hat{Q}_{j/i}(k+1) = \hat{Q}_{j/i} \otimes \exp\left(\frac{\Delta t}{2}\hat{\omega}^b_{j/i}\right)$. Для PQ_3 и PQ_2, обновление использует относительный якобиан H_{rel}, и его можно выразить как $K = PH^T_{rel}\left(H_{rel} + R\right)^{-1}$ и $\delta s = K(z - \hat{z})$. Двойственный кватернион затем обновляется как $\hat{Q}^+ = \hat{Q}^- \otimes \exp(\delta s)$ [3].

C. Реализация алгоритма мультипликативного расширенного фильтра Калмана (MEKF) на Matlab/Simulink

Этот раздел включает перевод математической основы в функциональную среду моделирования. Первый шаг — это шаг предсказания, который требует дискретного распространения двойственного кватернионного состояния с помощью интегратора Рунге-Кутты 4-го порядка. От t_k времени к t_{k+1} с временным Δt шагом. Второй этап обеспечивает шаг коррекции, предоставляя моделирование относительного измерения (на рис. 1 и 2 показана тепловая карта относительных измерений EKF и MEKF). В подходе EKF, при истинном относительном положении, $r = [10, 2, 1]^T$ измерители их оценочной позиции $\hat{r} = [9.8, 2.1, 0.9]^T$, а в MEKF — с соответствующими $z_k = [10, 2, 1]$ значениями, y_k баланс $[0.2, -0.1, 0.1]^T$.

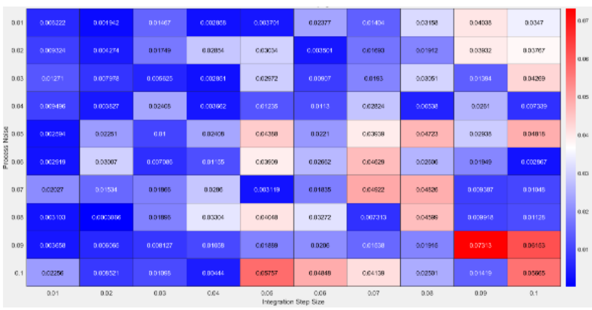

Рис. 1. Дискретная ошибка распространения RK4 на основе двойного кватернионного подхода

Рис. 2. Расширенная тепловая карта фильтра Калмана: относительные остатки измерений на основе подхода с двойным кватернионом.

D. *Анализ эффективности и визуализация относительных траекторий*

Рис. 3 и 4 иллюстрируют ошибку положения и ориентации с 3σ границами с использованием расширенного фильтра Калмана на основе двойственных кватернионов (DQ-EKF) и мультипликативного расширенного фильтра Калмана на основе двойственного кватерниона (DQ-MEKF). Переходный скачок на $t = 0$ оба подхода схож, но сетлы MEKF достигают лучшей точности в стационарном состоянии. Оба быстро сходятся внутри $\sim 20s$, но MEKF переходит к более низкому стационарному состоянию неопределённости.

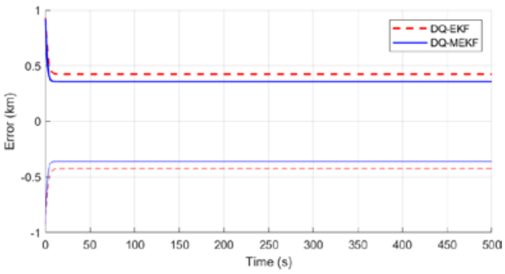

Рис. 3. Сравнительная иллюстрация ошибки положения и 3σ границ

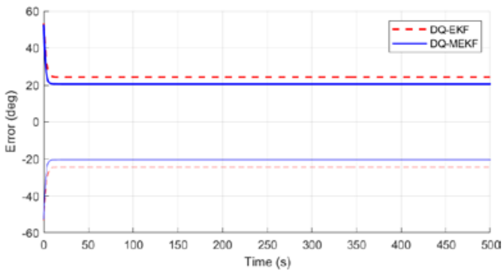

Рис. 4. Сравнительная иллюстрация ошибки ориентации и 3σ границ

III. Результаты

Мультилипликативный расширенный фильтр Калмана (MEKF) обычно предпочитается для оценки ориентации, поскольку он правильно обрабатывает группу вращения $SO(3)$. Используя двойственный кватернион, MEKF расширяется до специальной евклидовай группы $SO(3)$, позволяя создать унифицированную матрицу переходов в состояниях.

В предоставленном моделировании относительной навигации границы 3 сигмы для DQ-MEKF обычно показывают более высокую сходимость и более низкие значения в стационарном состоянии по сравнению со стандартным DQ-EKF. DQ-EKF часто страдает от ошибок линеаризации в взаимодействии трсняляции-вращения, поскольку рассматривает компоненты двойственных кватернионов как независимые аддитивные переменные.

Рис. 5 представляет собой иллюстрацию децентрализованного мультипликативного расширенного Kalman Filter 3D PocketQubes траектории. В нашем подходе каждый PocketQube поддерживает собственную локальную матрицу оценки состояния и ковариацию. В небольших группах взаимодействующих PocketQube каждый спутник выполняет свой собственный этап синтеза.

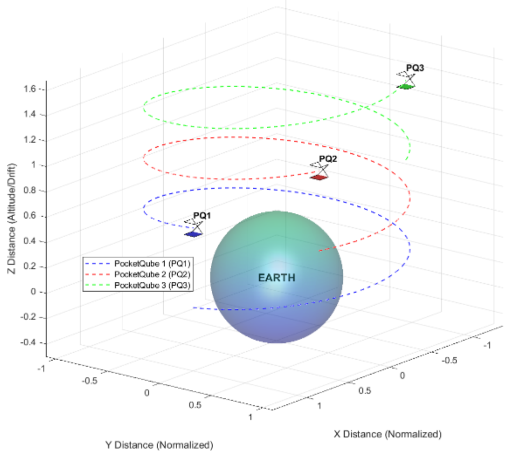

Fig. A. 3D отслеживание траектории PocketQube на основе DQ-MEKF

IV. Заключение

Наши исследования пришли к выводу, что двухкватернионный MEKF является лучшей основой для относительной навигации по сравнению с традиционными методами разъединения. Интегрируя трансляцию и вращение в одну алгебраическую структуру, фильтр демонстрирует повышенную устойчивость при агрессивных манёврах и обеспечивает более точные оценки скорости на основе шумных измерений позы. Использование мультипликативного обновления гарантирует строгое соблюдение геометрических ограничений позового многообразия, предотвращая численное расхождение.

Список литературы

[1] М. Л. Чжао, Т. Чэнь, П. Юань, П. Юань, С. Ли и Ю. Ло. «MF-IEKF: Мультипликативный федеративно-инвариантный расширенный фильтр Калмана для INS/GNSS», Sensor 2026,26(1),127. DOI:10.3390/s26010127

[2] Й. Гутемберг Фариас, Э. Де Пьери и Д. Мартинс. "Обзор применения двойных кватернионов". Машины 2024, 12(6), 402. DOI: 10.3390/machines12060402

[3] Х. де Бадин Матиас, Б. Йонас, И. Андреа и С. Рой. "Распределённая двухкватернионная расширенная фильтрация Калмана для оценки поз космического аппарата". AIAA J. Guidance, Control and Dynamics, том 48, No 5, стр. 1071-1087, 2025.