Численно устойчивая реализация парного фильтра Калмана на основе LD-разложения ковариационных матриц

А. В. Цыганов

Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова

andrew.tsyganov@gmail.com

Аннотация. **Рассматривается задача байесовского оценивания скрытого процесса в парных марковских моделях. Предложена новая численно устойчивая реализация парного фильтра Калмана на основе LD-разложения ковариационных матриц. Приведено математическое обоснование эквивалентности стандартному парному фильтру Калмана. Результаты экспериментов на плохо обусловленных задачах (вплоть до уровня машинного эпсилон) подтверждают устойчивость и работоспособность предложенного подхода в условиях, где стандартная реализация теряет точность.**

Ключевые слова: парный фильтр Калмана; LD-разложение; численная устойчивость; байесовское оценивание; марковские процессы

I. Введение

Одной из фундаментальных задач статистической обработки сигналов является оптимальное оценивание скрытого случайного процесса $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ по доступным наблюдениям $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Классическим подходом к решению этой задачи являются скрытые марковские модели (СММ), в которых предполагается, что ненаблюдаемый процесс является марковским. Оптимальная рекуррентная фильтрация для таких моделей реализуется фильтром Калмана (ФК).

В работе [1] была предложена концепция парных марковских цепей (ПМЦ), обобщающая классические СММ. Ключевое отличие ПМЦ от СММ заключается в том, что марковским предполагается не скрытый процесс, а пара $(x; y)$, что позволяет моделировать более сложные зависимости. При этом, как показано в [2], для линейных гауссовских парных марковских моделей (ПММ) сохраняется возможность фильтрации калмановского типа, что приводит к понятию парного фильтра Калмана (ПФК).

Практическая реализация ПФК на ЭВМ, как и в случае классического ФК, сталкивается с проблемой численной неустойчивости, связанной с ошибками машинного округления. К настоящему времени для классического ФК разработаны многочисленные методы, основанные на факторизации ковариационных матриц, повышающие устойчивость вычислений: квадратно-корневые алгоритмы на основе QR-разложений, UD-факторизация и SVD-разложение. Применение этих идей к ПФК впервые предложено в [3], где разработаны устойчивые версии алгоритмов фильтрации, сглаживания и EM-оценивания параметров на основе QR-разложений.

В отечественной литературе вопросы численно устойчивой реализации ПФК исследовались в работе [4], где представлены квадратно-корневые реализации и впервые предложен UD-алгоритм для ПФК. Дальнейшее развитие эти методы получили в [5], где рассмотрены адаптивные алгоритмы для одновременного оценивания состояния и параметров в ПММ и MIMO-системах. Недавние исследования [6] посвящены применению SVD-разложения для повышения устойчивости адаптивных фильтров в задачах эконометрического моделирования.

В настоящей работе предлагается новая численно устойчивая реализация ПФК, основанная на LD-версии модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта (МВГШО). В работе приводится обоснование эквивалентности предложенного подхода стандартному ПФК, а также результаты численных экспериментов, демонстрирующие устойчивость разработанного алгоритма в условиях плохой обусловленности, вплоть до уровня машинного эпсилон.

II. Постановка задачи и предлагаемый подход

Рассмотрим парную линейную стохастическую систему:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix}}_{t_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{x,x} & F_{x,y} \\ F_{y,x} & F_{y,y} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}} \begin{bmatrix} x_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_k^x \\ w_k^y \end{bmatrix}}_{w_k}, \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ — ненаблюдаемый вектор состояния, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ — доступные наблюдения, $k = 0,1,\ldots,N$ — дискретные моменты времени, $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ — гауссовский шум с ковариационной матрицей:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{x,x} & Q_{x,y} \\ Q_{y,x} & Q_{y,y} \end{bmatrix} > 0.$$

Начальное состояние $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$, $P_0 > 0$, независимо от шума w_k.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{F}_{x,x} = F_{x,x} - Q_{x,y} Q_{y,y}^{-1} F_{y,x}, \tag{2}$$

$$\hat{F}_{x,y} = F_{x,y} - Q_{x,y} Q_{y,y}^{-1} F_{y,y}, \tag{3}$$

$$\hat{Q}_{x,x} = Q_{x,x} - Q_{x,y} Q_{y,y}^{-1} Q_{y,x} \tag{4}$$

Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2026-035/1 от 21.02.2026 г. к Соглашению о предоставлении субсидии федеральному бюджетному или автономному учреждению на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2026-035 от 23.01.2026 г., заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

Обозначим через $\hat{x}_{k|k}$ оценку вектора состояния в момент времени k, а через $P_{k|k}$ ковариационную матрицу ошибки оценивания. Тогда классический ПФК описывается следующим алгоритмом:

Алгоритм 1. Классический ПФК

Инициализация

$$\hat{x}_{0|0} := \bar{x}_0,\ P_{0|0} = P_0 \tag{5}$$

for *k* = 0 to *N*–1

Этап экстраполяции

$$\hat{x}_{k+1|k} = \hat{F}_{x,x}\hat{x}_{k|k} + Q_{x,y}Q_{y,y}^{-1}y_k + \hat{F}_{x,y}y_{k-1}, \tag{6}$$

$$P_{k+1|k} = \hat{Q}_{x,x} + \hat{F}_{x,x}P_{k|k}\hat{F}_{x,x}^T. \tag{7}$$

Этап фильтрации

$$e_{k+1} = y_{k+1} - F_{y,x}\hat{x}_{k+1|k} - F_{y,y}y_k, \tag{8}$$

$$R_{e,k+1} = Q_{y,y} + F_{y,x}P_{k+1|k}F_{y,x}^T, \tag{9}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}F_{y,x}^T R_{e,k+1}^{-1}, \tag{10}$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1}R_{e,k+1}K_{k+1}^T, \tag{11}$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}e_{k+1}. \tag{12}$$

end for

Замечание 1. В формуле (6) при $k = 0$ слагаемое с y_{-1} опускается.

В основе предлагаемого подхода лежит LD-версия алгоритма МВГШО, обеспечивающая для матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($m \geq n$, $\operatorname{rank} A = n$) и диагональной матрицы весов $D_w = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m) > 0$ разложение:

$$A^T D_w A = LDL^T,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — строго нижняя треугольная матрица, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — диагональная матрица (LD-факторы матрицы A). Разложение задается матрицей $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такой, что:

$$A^T = LB^T,$$

$$B^T D_w B = D.$$

Ключевая идея предлагаемого подхода состоит в замене в уравнениях классического фильтра (5)–(12) операций с ковариационными матрицами на операции с их LD-факторами.

III. Основной результат

Основным результатом работы является численно устойчивая реализация ПФК, аналогичная UD-алгоритму, предложенному в [4], но основанная на LD-версии МВГШО.

Ключевым компонентом предлагаемого алгоритма является LD-реализация процедуры МВГШО [·,·]=MWGS-LD(·,·), принимающая на вход блочные матрицы (пред-массивы), составленные из величин, полученных в ходе работы фильтра, и возвращающая результат в виде блочных матриц (пост-массивов), из которых извлекаются результаты, необходимые для дальнейшей работы фильтра. LD-реализация ПФК может быть описана следующим алгоритмом:

Алгоритм 2. LD-версия ПФК

Инициализация

1. Вычислить вспомогательные матрицы по формулам (2)–(4).

2. Выполнить LD-разложение: $P_0 = L_{P_0}D_{P_0}L_{P_0}^T$, $\hat{Q}_{x,x} = L_Q D_Q L_Q^T$, $Q_{y,y} = L_R D_R L_R^T$.

3. Положить $\hat{x}_{0|0} := \bar{x}_0$, $L_P := L_{P_0}$, $D_P := D_{P_0}$.

for *k* = 0 to *N*–1

Этап экстраполяции

1. $\hat{x}_{k+1|k} := \hat{F}_{x,x}\hat{x}_{k|k} + Q_{x,y}Q_{y,y}^{-1}y_k + \hat{F}_{x,y}y_{k-1}$

2. Сформировать $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} L_P^T\hat{F}_{x,x}^T & L_Q^T \end{bmatrix}^T$, $\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_P & 0 \\ 0 & D_Q \end{bmatrix}$.

3. $[L_P, D_P] \leftarrow \text{MWGS-LD}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$.

Этап фильтрации

1. Сформировать $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} L_R & F_{y,x}L_P \\ 0 & L_P \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} D_R & 0 \\ 0 & D_P \end{bmatrix}$.

2. $[\mathcal{L}, \mathcal{D}] := \text{MWGS-LD}(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$.

3. Извлечь компоненты:

$L_{R_e} := \mathcal{L}(1{:}\,n_y, 1{:}\,n_y)$,

$D_{R_e} := \mathcal{D}(1{:}\,n_y, 1{:}\,n_y)$,

$L_P := \mathcal{L}(n_y + 1{:}\,end, n_y + 1{:}\,end)$,

$D_P := \mathcal{D}(n_y + 1{:}\,end, n_y + 1{:}\,end)$,

$KL_{R_e} := \mathcal{L}(n_y + 1{:}\,end, 1{:}\,n_y)$.

4. $e_{k+1} := y_{k+1} - F_{y,x}\hat{x}_{k+1|k} - F_{y,y}y_k$.

5. $\bar{e}_{k+1} := L_{R_e}^{-1}e_{k+1}$.

6. $\hat{x}_{k+1|k+1} := \hat{x}_{k+1|k} + (KL_{R_e})\bar{e}_{k+1}$.

end for

Доказательство алгебраической эквивалентности алгоритмов 1 и 2 проводится аналогично доказательству эквивалентности UD-алгоритма классическому ПФК, приведенному в [4].

Рассмотрим доказательство эквивалентности этапов экстраполяции.

Пусть $P_{k|k} = L_{P_{k|k}}D_{P_{k|k}}L_{P_{k|k}}^T$ и $\hat{Q}_{x,x} = L_{\hat{Q}_{x,x}}D_{\hat{Q}_{x,x}}L_{\hat{Q}_{x,x}}^T$, сформируем матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} L_{P_{k|k}}^T\hat{F}_{x,x}^T & L_{\hat{Q}_{x,x}}^T \end{bmatrix}^T \text{ и } \mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_{P_{k|k}} & 0 \\ 0 & D_{\hat{Q}_{x,x}} \end{bmatrix}.$$

Вычислим $\mathcal{A}^T\mathcal{D}\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^T\mathcal{D}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{x,x}L_{P_{k|k}} & L_{\hat{Q}_{x,x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{P_{k|k}} & 0 \\ 0 & D_{\hat{Q}_{x,x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{P_{k|k}}^T\hat{F}_{x,x}^T \\ L_{\hat{Q}_{x,x}}^T \end{bmatrix} =$$

$$= \hat{F}_{x,x}L_{P_{k|k}}D_{P_{k|k}}L_{P_{k|k}}^T\hat{F}_{x,x}^T + L_{\hat{Q}_{x,x}}D_{\hat{Q}_{x,x}}L_{\hat{Q}_{x,x}}^T =$$

$$= \hat{F}_{x,x}P_{k|k}\hat{F}_{x,x}^T + \hat{Q}_{x,x} = P_{k+1|k}.$$

Применяя процедуру MWGS-LD к паре $(\mathcal{A},\mathcal{D})$, получаем разложение:

$$\mathcal{A}^T\mathcal{D}\mathcal{A} = L_{P_{k+1|k}} D_{P_{k+1|k}} L_{P_{k+1|k}}^T,$$

где $L_{P_{k+1|k}}$ и $D_{P_{k+1|k}}$ — искомые факторы для $P_{k+1|k}$.

Доказательство эквивалентности этапов фильтрации проводится аналогично.

IV. Численный пример

Рассмотрим систему с плохо обусловленной схемой измерений [4]:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0{,}12 & 0{,}10 & 0{,}11 & 0{,}12 \\ 0{,}11 & 0{,}10 & 0{,}12 & 0{,}10 \\ 1{,}10 & 1{,}10 & 0{,}10 & 0{,}11 \\ 1{,}10 & 1{,}10+\delta & 0{,}12 & 0{,}10 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0{,}18 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^2 \end{bmatrix}.$$

с начальными условиями $\bar{x}_0 = [0{,}5{,}0{,}5]^T$, $P_0 = 2{,}5 I_2$. Параметр δ регулирует обусловленность задачи: при $\delta \to 0$ матрица $R_{e,k+1}$ становится плохо обусловленной. Значения δ выбраны таким образом, чтобы проследить поведение фильтров вблизи машинного эпсилон $\epsilon_{\text{маш}} \approx 2{,}22 \times 10^{-16}$ (для чисел двойной точности в IEEE 754).

Эксперимент проводился для значений параметра $\delta = 10^{-14}, 10^{-15}, 10^{-16}, 10^{-17}, 10^{-18}$.

Для каждого значения выполнялось $L = 100$ независимых запусков на интервале из $N = 1000$ шагов. Оценка точности производилась по накопленной среднеквадратичной ошибке (ARMSE):

$$\text{ARMSE} = \sqrt{\frac{1}{LNn_x}\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_k^{(i)} - \hat{x}_{k|k}^{(i)}\right)^2}.$$

Результаты экспериментов представлены в таблице 1. Значения NaN в таблице соответствуют ошибкам, возникающим в ходе работы классического ПФК. Проведенные эксперименты подтверждают, что предложенная в работе LD-версия ПФК характеризуется лучшей численной устойчивостью по сравнению с классическим ПФК, и может быть рекомендована для практического использования в задачах, требующих высокой точности вычислений при работе с плохо обусловленными данными.

ТАБЛИЦА I. Результаты экспериментов

δ	ARMSE	
	Классический ПФК	LD-версия ПФК
10^{-14}	0.122528	0.122058
10^{-15}	0.122661	0.122148
10^{-16}	NaN	0.122801
10^{-17}	NaN	0.122456
10^{-18}	NaN	0.122169

V. Заключение

В работе предложена новая численно устойчивая реализация ПФК на основе LD-разложения ковариационных матриц.

Доказана алгебраическая эквивалентность LD-реализации классическому ПФК. В ходе проведенных вычислительных экспериментов показано, что стандартный фильтр теряет работоспособность при экстремально плохой обусловленности, тогда как LD-реализация сохраняет устойчивость и точность в условиях, где классический алгоритм полностью теряет работоспособность.

Разработанный LD-алгоритм может быть рекомендован для практического использования в задачах, требующих высокой надежности вычислений при работе с плохо обусловленными данными.

Список литературы

[1] Pieczynski W. Pairwise Markov chains // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2003. Vol. 25, No. 5. P. 634–639.

[2] Pieczynski W., Desbouvries F. Kalman filtering using pairwise Gaussian models // Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'03). Hong Kong, 2003. Vol. 6. P. 57–60.

[3] Nemesin V., Derrode S. Robust blind pairwise Kalman algorithms using QR decompositions // IEEE Transactions on Signal Processing. 2013. Vol. 61, No. 1. P. 5–9.

[4] Куликова М.В., Цыганова Ю.В. Численно устойчивые реализации фильтра Калмана для оценивания линейных парных марковских моделей с гауссовым шумом // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, № 3. С. 45–60.

[5] Kulikova M.V., Tsyganova J.V., Kulikov G.Yu. UD-based pairwise and MIMO Kalman-like filtering for estimation of econometric model structures // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65, No. 10. P. 4472–4479.

[6] Kulikova M.V., Tsyganova J.V., Kulikov G.Yu. SVD-based state and parameter estimation approach for generalized Kalman filtering with application to GARCH-in-Mean estimation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. Vol. 387.