Децентрализованные оценки математического ожидания и дисперсии в сенсорной сети на основе алгоритма консенсуса

Е. А. Маврычев

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

mavrychev.eugene@mail.ru

Аннотация. **В данной работе рассматривается статистическая обработка измерений, полученных в децентрализованной сенсорной сети. Рассматривается оценка математического ожидания и дисперсии измеряемой случайной величины. Предлагается полностью децентрализованный алгоритм оценки статистических параметров, основанный на итерационном алгоритме консенсусного усреднения. Реализация децентрализованного алгоритма предполагает отсутствие общего центра, в котором собираются результаты измерений, полученные сенсорами. Представлены статистические характеристики оценок параметров случайной величины, полученных с помощью децентрализованного алгоритма.**

Ключевые слова: Сенсорная сеть; статистические оценки; распределенный алгоритм; консенсусное усреднение

I. Введение

Распределенным методам обработки сигналов уделяется повышенное внимание в связи с появлением различных сетей сбора и анализа данных. Особый интерес представляют сети, узлы которых являются автономными агентами [1–2], использующие получаемую от датчиков (сенсоров) информацию для принятия решений. Такие сети можно назвать интеллектуальными сенсорными сетями или многоагентными сетями. Объединение и совместная обработка сигналов в сети позволяет улучшить качество информации, получаемой отдельными агентами сети. В многоагентных системах целесообразно применять распределенные алгоритмы обработки сигналов [1–8]. Применение таких алгоритмов обусловлено отсутствием общего центра, равноправием всех узлов и необходимостью получения на каждом узле распределенной оценки информационных параметров. Кроме того, в распределенных алгоритмах может быть реализован принцип конфиденциальности данных, получаемых агентами сети, так как они не делятся своими данными, а передают лишь результаты промежуточных вычислений. Такой подход реализуется при федеративном обучении [9].

В работах [3], [4] рассматривается один из базовых алгоритмов распределенной обработки – алгоритм консенсуса, который позволяет вычислить среднее значение величин, распределенных в узлах сети. Алгоритмы оценки параметров в сети на основе среднеквадратической ошибки представлены в работах [5], [6]. Метод децентрализованной оценки подпространства сигналов корреляционной матрицы был предложен в [7]. В работе [8] представлена распределенная реализация метода анализа главных компонент на основе сингулярного разложения.

В данной работе рассматривается модель сенсорной сети, в которой каждый узел производит измерение некоторой случайной величины. Полезную информацию содержит два параметра: математическое ожидание и дисперсия, которые необходимо оценить по данным, полученным в сети. Предполагается также наличие некоторой аддитивной ошибки измерения, которая также является случайной.

Рассматривается децентрализованная оценка параметров наблюдаемой случайной величины в узлах сети. Предполагается, что сеть не имеет общего центра, а узлы сети могут обмениваться данными со своими соседями для реализации распределенного алгоритма оценки. Топология связей узлов сети может быть произвольной и задается графом. Для реализации децентрализованной оценки параметров распределения случайной величины используется алгоритм консенсуса, обеспечивающий итерационное суммирование значений, определенных локально в узлах сети.

II. Модель измерений в сенсорной сети

Будем рассматривать сенсорную сеть, состоящую из N узлов. Каждый узел сети выполняет наблюдение некоторой случайной величины $X \in \mathbb{R}$, принадлежащей множеству вещественных чисел, которая характеризует исследуемый физический процесс. Параметры распределения случайной величиной X, такие как математическое ожидание и дисперсия, являются основными характеристиками процесса, и их оценка является задачей обработки данных, получаемых сенсорной сетью.

Для случайной величины X введем следующие обозначения $\bar{x} = \mathbb{E}\{X\}$ – математическое ожидание и $\sigma_x^2 = \mathbb{E}\{(X-\bar{x})^2\}$ – дисперсия, где $\mathbb{E}\{.\}$ – оператор статистического усреднения.

Измерение, полученное на n-ом узле сети, запишем как $y_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \{1,\dots,N\}$. Будем считать, что измерение y_n является суммой наблюдаемой величины с некоторой аддитивной ошибкой, тогда модель измерений запишем в виде

$$y_n = x_n + e_n, \quad n = 1,\dots,N, \tag{1}$$

где x_n – реализация случайной величины X, полученная на n-ом узле сети, e_n – ошибка n-го измерения.

Полагаем, что выборочные значения $x_1, x_2, \ldots x_N$ случайной величины X являются статистически независимыми, т.е. корреляционными моментами, равными $\mathbb{E}\{x_n x_m\} = 0, \quad \forall n \neq m \in \{1, \ldots N\}$.

Считаем, что ошибки измерений являются случайными величинами с математическим ожиданием и дисперсией

$$\mathbb{E}\{e_n\} = 0, \quad \mathbb{E}\{e_e^2\} = \sigma_e^2, \tag{2}$$

а также являются статистически независимыми между собой, т.е. $\mathbb{E}\{e_n e_m\} = 0, \quad \forall n \neq m \in \{1, \ldots N\}$.

Измерения $y_1, y_2, \ldots y_N$ являются выборкой случайной величины Y, которая имеет математическое ожидание и дисперсию

$$\bar{y} = \mathbb{E}\{Y\} = \bar{x}, \tag{3}$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\{(Y - \bar{x})^2\} = \sigma_x^2 + \sigma_e^2, \tag{4}$$

Тогда оценка математического ожидания величины Y совпадает с X, а оценка дисперсии величины Y имеет смещение на величину дисперсии ошибки σ_e^2 по сравнению с X.

Таким образом, будем ставить задачу оценки параметров распределения $\bar{y}, \sigma^2$ измеряемой величины Y, которые однозначно связаны с параметрами распределения случайной величины X.

III. Представление топологии сети

Будем рассматривать сеть, в которой нет общего центра обработки. Узлы сети обмениваются данными для извлечения информации, заключающегося в получении статистических оценок. Полагаем, что обмен данными может осуществляться только между двумя связанными друг с другом узлами. Наличие связи между узлами определяется их пространственным расположением и возможностями коммуникационной сети.

Полагаем, что топология связей между узлами сети может быть произвольной. Описание топологии связи узлов осуществляется с помощью графа $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{E})$, который представляет собой совокупность двух конечных множеств: $\mathcal{N}$ – множество вершин или узлов и $\mathcal{E}$ – множество ребер. Множество узлов $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ представляет совокупность всех узлов сенсорной сети. Множество ребер $\mathcal{E}$ представляет собой набор всех упорядоченных пар узлов графа, между которыми проходит ребро, т.е. $\forall n, m \in \mathcal{N}$, если $(n, m) \in \mathcal{E}$, то между узлами n и m есть ребро, иначе $(n, m) \notin \mathcal{E}$, то ребро отсутствует. Будем полагать, что если $(n, m) \in \mathcal{E}$, то $(m, n) \in \mathcal{E}$, т.е. граф является ненаправленным, что означает двухстороннюю связь между узлами n и m.

Топологию сети можно представить альтернативным способом, что является более удобным для рассматриваемого в данной работе алгоритма распределенной обработки. Граф сети можно описывать с помощью совокупности конечных множеств $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_N$, где множество $\mathcal{N}_n$ содержит номера узлов, с которыми n-ый узел имеет соединения, а узлы из множества $\mathcal{N}_n$ называют соседями n-го узла. Если узлы n и m имеют соединение, тогда $(n, m) \in \mathcal{E}$, что означает для ненаправленного графа $m \in \mathcal{N}_n$ и $n \in \mathcal{N}_m$.

Отметим, что каждый узел сети имеет информацию только о своих соседях и не знает полную топологию. Кроме того, топология сети может динамически изменяться. Данные факторы затрудняют использование централизованных алгоритмов, в которых необходимо выполнить сбор всех данных в одном центре.

IV. Алгоритм консенсусного усреднения

Рассмотрим полностью распределенный алгоритм консенсусного усреднения, который позволяет получить оценку среднего значения $\bar{\xi}$ в узлах сети, описываемой графом $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{E})$, равного

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \xi_n = \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\xi}^{(0)}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\xi}^{(0)} = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N]^T \in \mathbb{R}^N$ – вектор значений усредняемой величины, $\mathbf{1}$ – вектор размерности $N \times 1$, состоящий из единиц, $[.]^T$ – операция транспонирования.

Значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ определенны в соответствующих узлах сети, т.е. $\forall n \in \mathcal{N}$ значение ξ_n доступно только на n-ом узле. Консенсусный алгоритм является итерационным алгоритмом, в котором по результатам J итераций должен быть получен вектор оценок $\boldsymbol{\xi}^{(J)} = [\xi_1^{(J)}, \xi_2^{(J)}, \ldots, \xi_N^{(J)}]^T \in \mathbb{R}^N$, каждый элемент которого является оценкой $\bar{\xi}$ в соответствующем узле сети. Начальным приближением итерационного алгоритма является вектор усрдняемых величин $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$.

Элементы вектора $\boldsymbol{\xi}^{(j+1)}$ для $(j+1)$-ой итерации вычисляются как

$$\xi_n^{(j+1)} = \xi_n^{(j)} + \sum_{m \in \mathcal{N}_n} w_{n,m} (\xi_m^{(j)} - \xi_n^{(j)}), \quad n \in \mathcal{N}, \tag{6}$$

где $w_{n,m}$ – коэффициенты консенсусного усреднения.

В матричном виде $(j+1)$-ая итерация консенсусного усреднения записывается как

$$\boldsymbol{\xi}^{(j+1)} = \mathbf{W} \boldsymbol{\xi}^{(j)}, \tag{7}$$

где $\mathbf{W}$ – матрица коэффициентов консенсуса.

В выражении (6) суммирование осуществляется по множеству узлов-соседей $\mathcal{N}_n$, тогда общее правило для коэффициентов матрицы $\mathbf{W}$ можно записать как

$$\mathbf{W} = \begin{cases} w_{n,m} > 0, & n = m \cap m \in \mathcal{N}_n, \\ w_{n,m} = 0, & n \neq m \cup m \notin \mathcal{N}_n. \end{cases} \qquad (8)$$

Для обеспечения сходимости весовая матрица должна удовлетворять следующим условиям [4] $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, $\mathbf{W1} = \mathbf{1}$. Исходя из этих условий, выбор весовых коэффициентов может осуществляться множеством способов. Будем использовать вес, предложенный в [4], который позволяет получить несмещенную оценку среднего значения (5)

$$w_{n,m} = \begin{cases} 1/(\max\{N_n, N_m\}+1), & m \in \mathcal{N}_n, \\ 1 - \sum\limits_{m \in \mathcal{N}_n} 1/(\max\{N_n, N_m\}+1), & n = m \\ w_{n,m} = 0, \quad n \neq m \cup m \notin \mathcal{N}_n. \end{cases} \qquad (9)$$

Распределенная оценка среднего значения после J итераций может быть записана как

$$\boldsymbol{\xi}^{(J)} = \mathbf{A}_J \boldsymbol{\xi}^{(0)}, \quad \mathbf{A}_J = \underbrace{\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} \cdot \ldots \cdot \mathbf{W}}_{J}, \qquad (10)$$

где $\mathbf{A}_J$ – матрица, являющаяся оператором консенсусного усреднения в течении J итераций.

A. Оценка математического ожидания

Оценка математического ожидания случайной величины Y по N измерениям $y_1, y_2, \ldots, y_N$ записывается в виде среднего значения

$$\hat{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y_n \,. \qquad (11)$$

Математическое ожидание оценки $\hat{y}$ и ее дисперсия будут равны [10]

$$\mathbb{E}\{\hat{y}\} = \bar{y}\,, \qquad (12)$$

$$\mathbb{E}\{(\hat{y} - \bar{y})^2\} = \frac{1}{N}\sigma^2. \qquad (13)$$

Децентрализованная оценка математического ожидания реализуется вычислением среднего значения (11) с помощью алгоритма консенсусного усреднения. Тогда вектор оценки математического ожидания в узлах сети можно записать через матрицу-оператор

$$\hat{\mathbf{y}}^{(J)} = \mathbf{A}_J \mathbf{y}\,. \qquad (14)$$

B. Оценка дисперсии

Несмещенная оценка дисперсии случайной величины Y по N измерениям $y_1, y_2, \ldots, y_N$ записывается в виде

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} \left(y_n - \hat{x}\right)^2. \qquad (15)$$

Математическое ожидание оценки $\hat{\sigma}^2$ и ее дисперсия будут равны [10]

$$\mathbb{E}\{\hat{\sigma}^2\} = \sigma^2\,, \qquad (16)$$

$$\mathbb{E}\{(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2\} = \frac{2\sigma^4}{N-1}. \qquad (17)$$

Рассмотрим децентрализованную оценку дисперсии в сети, которую также можно выполнить на основе алгоритма консенсуса. Для этого введем вектор моментов второго порядка, центрированных к величинам оценок математического ожидания, полученных на соответствующих узлах сети

$$\mathbf{z} = \frac{N}{N-1} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}^{(J)})^2. \qquad (18)$$

Очевидно, что оценка дисперсии (15) будет представлять собой среднее значение элементов вектора (18). Так как элементы вектора (18) известны локально в узлах сети, то усреднение можно выполнить с помощью алгоритма консенсуса, который в операторной форме записывается как

$$\mathbf{z}^{(J)} = \mathbf{A}_J \mathbf{z}\,. \qquad (19)$$

V. Численные результаты

Рассмотрим сенсорную сеть, состоящую из двенадцати узлов (N=12) с детерминированной топологией, в которой каждый узел имеет от 2-х до 4-х узла-соседа, при этом среднее число соседей равно 3-м. Будем рассматривать характеристики оценок на первом узле с 2-мя соседями и на пятом узле с 4-мя соседями.

Пусть случайная величина X имеет математическое ожидание $\bar{x} = 1.7$ и дисперсию $\sigma_x^2 = 2.5$. Измерение в сенсорах выполняется на фоне ошибки с дисперсией, равной $\sigma_e^2 = 1$. Случайная величина X и ошибки измерения моделировались как гауссовские случайные величины.

По результатам 10000 статистических экспериментов получены распределенные оценки математического ожидания и дисперсии величины Y на основе (14) и (19), соответственно. По полученным данным вычислены математические ожидания и дисперсии оценок.

На рис. 1–3 показаны зависимости статистических характеристик децентрализованного оценивания в зависимости от числа итераций консенсусного алгоритма. Приведены характеристики для двух узлов сети: первого (с двумя соседями) и пятого (с четырьмя соседями), а также теоретические значения характеристик, полученных для точных оценок (11) и (15). На рис. 1 показаны зависимости дисперсии оценки математического ожидания, на рис. 2 – зависимости математического ожидания оценки дисперсии и на рис. 3 – зависимости дисперсии оценки дисперсии. Как видно из рисунков, все характеристики при увеличении числа итераций сходятся к теоретическим значениям.

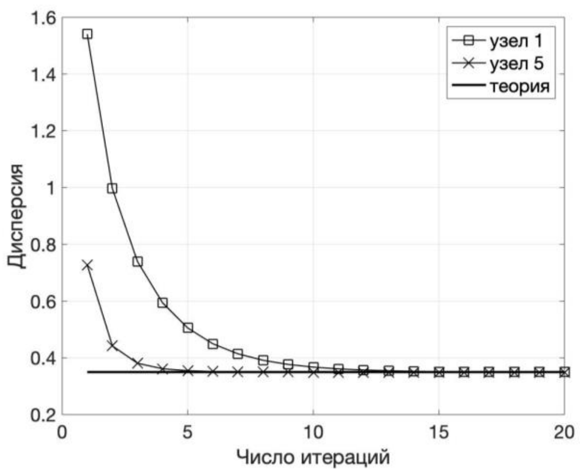

Рис. 1. Дисперсия оценки математического ожидания в зависимости от числа итераций

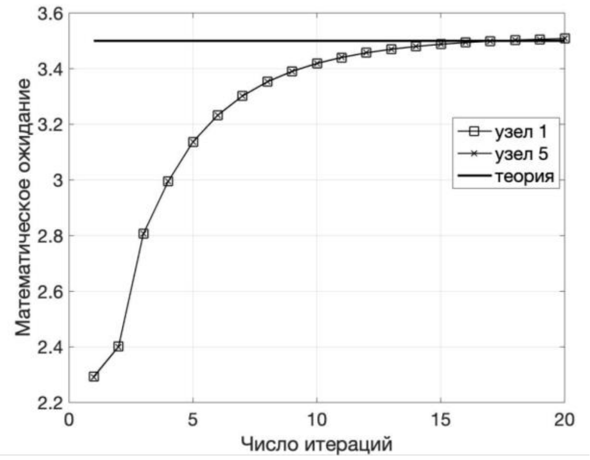

Рис. 2. Математическое ожидание оценки дисперсии в зависимости от числа итераций

VI. Заключение

В данной работе рассмотрен распределенный алгоритм оценки параметров распределения случайных величин, а именно, оценок математического ожидания и дисперсии. Оценка параметров выполняется на основе алгоритма консенсусного усреднения, который является полностью распределенным алгоритмом. В результате математического моделирования получены статистические характеристики распределенных оценок, которые асимптотически сходятся к теоретическим значениям.

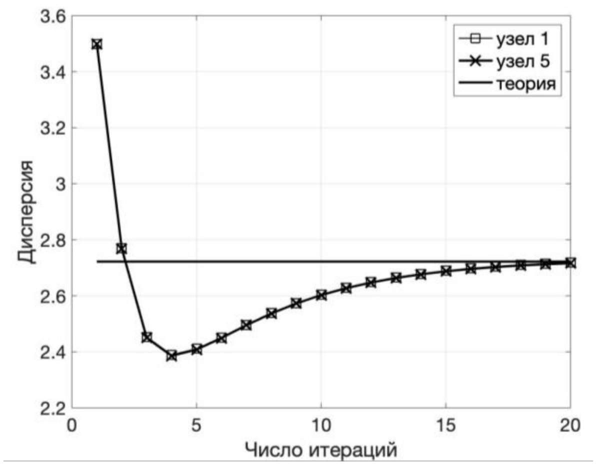

Рис. 3. Дисперсия оценки дисперсии в зависимости от числа итераций

Список литературы

[1] Sayed A. Adaptation, learning, and optimization over networks. Now Found. and Trends, 2014.

[2] Bordignon V., Matta V., and Sayed A. H. Socially intelligent networks. IEEE Signal Processing Magazine, vol. 41, Jul. 2024, pp. 20-39.

[3] Olfati-Saber R., Fax J.A., and Murray M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. Proceedings of the IEEE. vol. 95. Jan. 2007. pp. 215–233.

[4] Xiao L. and Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging. Syst. Control Lett. vol. 53, no. 1. Sept. 2004. pp. 65–78.

[5] Schizas I.D., Ribeiro A., and Giannakis G.B. Consensus in ad hoc WSNs with noisy links - Part I: Distributed estimation of deterministic signals. IEEE Trans. Signal Process. vol. 56. Jan. 2008. pp. 350–364.

[6] Takahashi N., Yamada I., Sayed A.H. Diffusion least-mean squares with adaptive combiners: formulation and performance analysis. IEEE Trans. Signal Process. vol. 58, no 9. Sep. 2010. pp. 4795–4810.

[7] Scaglione A., Pagliari R., and Krim H. The decentralized estimation of the sample covariance. 42nd Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers. 26-29 Oct. 2008.

[8] Li L., Scaglione A., Manton J.H. Distributed principal subspace estimation in wireless sensor networks. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. vol. 5, no 4. Aug. 2011. pp. 725–738.

[9] Gafni T., Shlezinger N., Cohen K., Eldar Y.C., Poor H.V. Federated learning: a signal processing perspective. IEEE Trans. Signal Mag. vol. 39, no 3. May 2022. pp. 14-41.

[10] Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга вторая. М: «Сов. радио», 1968. 504 с.