Нейросетевое адаптивное робастное управление многостепенным упругим электромеханическим объектом в условиях параметрической неопределенности

А. А. Кузнецов
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
smith_spb@mail.ru

Нгуен Зуи Хань
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
khanhnguyen.mta@gmail.com

В. В. Путов
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
vvputov@mail.ru

В. Н. Шелудько
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
vnsheludko@etu.ru

Т. Л. Русяева
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
tlrusyaeva@etu.ru

Аннотация. **В статье рассматривается задача синтеза нейросетевого адаптивного робастного управления многостепенным упругим электромеханическим объектом в условиях несогласованных неопределенностей, вызванных неопределенностью параметров объекта. Строится нелинейная математическая модель четырехзвенного манипулятора, включающая упругость и зазор в сочленениях звеньев, а также электромагнитную динамику электроприводов постоянного тока и трехконтурное подчиненное управление. Синтез управления осуществляется на основе метода обратного обхода интегратора в пять шагов. Для снижения вычислительной сложности и упрощения процедуры синтеза применяется нейронная сеть, аппроксимирующая несогласованные неопределенности и производные виртуальных управлений. На этой основе предлагается адаптивное робастное управление с алгоритмами настройки, обеспечивающее робастную устойчивость системы.**

Ключевые слова: адаптивное робастное управление; упрощенный метод обхода интегратора с нейронной сетью; многостепенный упругий электромеханический объект; манипуляционный робот; неопределенность

I. Введение

Многостепенные электромеханические объекты, такие как роботы-манипуляторы, представляют собой системы с существенной нелинейностью и параметрической неопределенностью параметров объекта. Существует ряд подходов к решению проблемы управления движением такими объектами в условиях неопределенности: робастное управление, адаптивное управление, управление с скользящим режимом [1]. Управление сложными нелинейными динамическими объектами осложняется параметрической и функциональной неопределенностью, а также действием неизвестных внешних возмущений. Решение этой проблемы потребовало от теории адаптивного и нелинейного управления принципиально новых подходов. Эти подходы основаны на интеграции итеративных (пошаговых) процедур построения нелинейного регулятора в основном контуре – в частности, метода обхода интегратора (backstepping) – с алгоритмами адаптивной настройки параметров [2].

Одним из активно развиваемых направлений в последнее время стало построение систем управления на базе нейронных сетей, чему посвящены, в частности, работы [3–6]. В настоящей статье решение задачи аппроксимации неопределенных параметров объекта и производных виртуальных управлений базируется на использовании RBF-сети, которая при достаточном количестве скрытых узлов обеспечивает аппроксимацию произвольных ограниченных непрерывных функций с любой наперед заданной точностью [7–8]. За последние десятилетия был опубликован ряд работ, посвященных синтезу адаптивного управления роботами-манипуляторами на основе RBF-сетей [9–13].

II. Полное математическое описание упругого манипулятора

Рассмотрим четырехзвенный упругий манипулятор с электромагнитной динамикой электроприводов постоянного тока и трехконтурным подчиненным управлением [14]:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_L(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_L(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_c(\boldsymbol{\theta}-\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_y; \\ \mathbf{J}_d\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_c(\boldsymbol{\theta}-\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_y = \mathbf{K}_{\text{м}}\mathbf{I}_{\text{я}}; \\ \mathbf{L}_{\text{я}}\dot{\mathbf{I}}_{\text{я}} + \mathbf{K}_r\mathbf{I}_{\text{я}} + \mathbf{K}_a\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_q\mathbf{q} = \mathbf{K}_u\mathbf{u}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ – векторы обобщённых кооординат и скоростей; $\mathbf{D}_L(\mathbf{q})$ – функциональная матрица инерции; $\mathbf{C}_L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})$ – функциональная матрица кориолисовых и центробежных сил; $\mathbf{G}_L(\mathbf{q})$ – вектор-функция гравитационных сил; $\mathbf{K}_c$ – диагональная матрица с коэффициентами жесткости c_i; $\boldsymbol{\theta}$ – вектор углов вращения приводных частей i-го двигателя; J_{di} – момент инерции i-го двигателя с частью жестко соединенных с ним звеньев механизма; $\mathbf{J}_d$ – диагональная матрица с коэффициентами J_{di}; f_{yi} – упругий момент (с зазором шириной $2\delta_i$) и m_{yi} –

упругий момент (без зазора); $\tau_{y_i} = f_{yi} - m_{yi}$; $\mathbf{L}_я$ – диагональная матрица с коэффициентами $L_{яi}$; $\mathbf{K}_м$ – диагональная матрица с коэффициентами $k_{мi}$; $\mathbf{K}_r$ – диагональная матрица с коэффициентами $k_{ri} = R_{яi} + k_{yi}\beta_{тi}k_{тi}$; $\mathbf{K}_a$ – диагональная матрица с коэффициентами $k_{ai} = k_{ei} + k_{yi}\beta_{тi}\beta_{ci}k_{ci}$; $\mathbf{K}_q$ – диагональная матрица с коэффициентами $k_{qi} = k_{yi}\beta_{тi}\beta_{ci}\beta_{пi}k_{пi}$; $\mathbf{K}_u$ – диагональная матрица с коэффициентами $k_{ui} = k_{yi}\beta_{тi}\beta_{ci}\beta_{пi}$; $L_{яi}$, $R_{яi}$ – индуктивность и активное сопротивление цепи якорной обмотки i-го двигателя соответственно; k_{ei}, $k_{мi}$ – постоянные коэффициенты, определяемые конструктивными данными электрической машины постоянного тока; k_{yi} – коэффициент передачи i-го УМ; $i, j = 1,2,3,4$; $e_я$ – ЭДС якорной обмотки i-го двигателя; $\beta_т$, $\beta_с$, $\beta_п$, $k_т$, $k_с$, $k_п$ – коэффициенты усиления (передачи) контурных регуляторов.

III. Синтез адаптивного робастного управления

Преобразуем систему (1) к форме Коши. Пусть $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{x}_3 = \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{x}_4 = \dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathbf{x}_5 = \mathbf{I}_я$, тогда

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2; \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_3 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3); \dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_4 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 = \mathbf{x}_5 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5); \dot{\mathbf{x}}_5 = \mathbf{g}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{u}) + \mathbf{B}_0\mathbf{u}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{B}_0 = \mathbf{L}_{я0}^{-1}\mathbf{K}_{u0}$; $\mathbf{L}_{я0}$, $\mathbf{K}_{u0}$ – матрицы с номинальными значениями параметров;

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = -\mathbf{x}_3 + \mathbf{D}_L^{-1}\left[-\mathbf{C}_L\mathbf{x}_2 - \mathbf{G}_L + \mathbf{K}_c(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) + \boldsymbol{\tau}_y\right];$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5) = -\mathbf{x}_5 - \mathbf{J}_d^{-1}\left[\mathbf{K}_c(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) + \boldsymbol{\tau}_y\right] + \mathbf{J}_d^{-1}\mathbf{K}_м\mathbf{x}_5;$$

$$\mathbf{g}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{u}) = -\mathbf{L}_я^{-1}\left(\mathbf{K}_r\mathbf{x}_5 + \mathbf{K}_a\mathbf{x}_4 + \mathbf{K}_q\mathbf{x}_1\right)$$

$$+\left(\mathbf{L}_я^{-1}\mathbf{K}_u - \mathbf{L}_{я0}^{-1}\mathbf{K}_{u0}\right)\mathbf{u}.$$

Применим метод обратного обхода интегратора с функциями настройки и RBF-сетью.

ШАГ 1. Введем следующие обозначения ($\boldsymbol{\alpha}_1$ – виртуальное управление):

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_d; \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1, \quad (3)$$

Из (2) и (3) имеем $\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 - \dot{\mathbf{x}}_d$. (4)

Выберем функцию Ляпунова в виде $V_1 = 0.5\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_1$ и вычислим ее производную:

$$\dot{V}_1 = \mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 - \dot{\mathbf{x}}_d), \quad (5)$$

тогда виртуальное управление $\boldsymbol{\alpha}_1 = -\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 + \dot{\mathbf{x}}_d$, (6)

где $\mathbf{k}_1 > 0 \in R^{n\times n}$. Подставляя уравнение (6) в (5), получим

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_2. \quad (7)$$

ШАГ 2. Введем переменную $\mathbf{z}_3 = \mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2$, где $\boldsymbol{\alpha}_2$ виртуальное управление. С учетом (2) и (3) имеем

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{x}_3 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1. \quad (8)$$

Используем RBF-сеть для аппроксимации неизвестной вектор-функции

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \mathbf{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad (9)$$

где $\mathbf{W}_1^{\mathrm{T}} \in R^{n\times m}$ – неизвестная матрица весов; $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d) \in R^{m\times 1}$ – вектор известных базисных функций; $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \in R^{n\times 1}$ - ошибка аппроксимации.

Тогда (8) с учетом (9) имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{z}_3 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1. \quad (10)$$

Пусть $\hat{\mathbf{W}}_1$ – оценка $\mathbf{W}_1$; $\tilde{\mathbf{W}}_1 = \mathbf{W}_1 - \hat{\mathbf{W}}_1$ – ошибка оценивания. Выберем функцию Ляпунова в виде $V_2 = V_1 + 0.5\mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_2$ и вычислим ее производную с учетом (7) и (10): $\dot{V}_2 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{z}_3 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1\right)$.

Виртуальное управление $\boldsymbol{\alpha}_2 = -\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 - \hat{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_1$, (11)

где $\mathbf{k}_2 > 0 \in R^{n\times n}$. Тогда производная $\dot{V}_2$ будет

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1\right). \quad (12)$$

Введем в рассмотрение следующую функцию Ляпунова $V_{2a} = V_2 + \mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_1\right)$ и учитывая (12):

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2a} &= -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \\ &+ \mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_1\mathbf{z}_2^{\mathrm{T}} - \tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}\dot{\hat{\mathbf{W}}}_1\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда адаптивный робастный алгоритм настройки будет $\dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_1\left(\boldsymbol{\varphi}_1\mathbf{z}_2^{\mathrm{T}} - \eta\|\xi\|\hat{\mathbf{W}}_1\right)$, (14)

где $\xi = \left[\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \in R^{5n\times 1}$; $\eta > 0$ – параметр алгоритма настройки. Подставляя (14) в (13), получим

$$\dot{V}_{2a} = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \eta\|\xi\|\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) \quad (15)$$

ШАГ 3. Введем переменную $\mathbf{z}_4 = \mathbf{x}_4 - \boldsymbol{\alpha}_3$, где $\boldsymbol{\alpha}_3$ виртуальное управление. С учетом выражений (2) динамику $\mathbf{z}_3$ имеет вид: $\dot{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{x}_4 - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \mathbf{z}_4 + \boldsymbol{\alpha}_3 - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2$. (16)

Используем RBF-сеть для аппроксимации неизвестной вектор-функции $-\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \mathbf{W}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$, (17)

где $\mathbf{W}_2^{\mathrm{T}} \in R^{n\times k}$ – неизвестная матрица весов; $\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d) \in R^{k\times 1}$ – вектор известных базисных функций; $\boldsymbol{\varepsilon}_2 \in R^{n\times 1}$ – ошибка аппроксимации. Тогда (16) с учетом (17): $\dot{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{z}_4 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \mathbf{W}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$. (18)

Пусть $\hat{\mathbf{W}}_2$ – оценка $\mathbf{W}_2$; $\tilde{\mathbf{W}}_2 = \mathbf{W}_2 - \hat{\mathbf{W}}_2$ – ошибка. Выберем функцию Ляпунова в виде $V_3 = V_{2a} + 0.5\mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_3$ и вычислим ее производную с учетом (15) и (16):

$$\dot{V}_3 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \\ + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{z}_4 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \mathbf{W}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2\right).$$

Выберем $$\boldsymbol{\alpha}_3 = -\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2 - \hat{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_2, \qquad (19)$$

где $\mathbf{k}_3 > 0 \in R^{n\times n}$. Тогда производная $\dot{V}_3$ будет

$$\dot{V}_3 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \\ + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2\right). \qquad (20)$$

Введем в рассмотрение следующую функцию Ляпунова $V_{3a} = V_3 + \operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_2^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_2\right)$ и учитывая (20), найдем ее производную

$$\dot{V}_{3a} = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \\ + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_2\mathbf{z}_3^{\mathrm{T}} - \tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_2^{-1}\dot{\hat{\mathbf{W}}}_2\right). \qquad (21)$$

Тогда адаптивный робастный алгоритм настройки будет $$\dot{\hat{\mathbf{W}}}_2 = \boldsymbol{\Gamma}_2\left(\boldsymbol{\varphi}_2\mathbf{z}_3^{\mathrm{T}} - \eta\|\xi\|\hat{\mathbf{W}}_2\right), \qquad (22)$$

где $\xi = \left[\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \in R^{5n\times 1}$; $\eta > 0$ – параметр алгоритма настройки. Подставляя (22) в (21), получим

$$\dot{V}_{3a} = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \\ + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right). \qquad (23)$$

ШАГ 4. Введем переменную $\mathbf{z}_5 = \mathbf{x}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$, где $\boldsymbol{\alpha}_4$ виртуальное управление. С учетом выражений (2) имеем

$$\dot{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{x}_5 + \mathbf{g}_2\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5\right) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_3, \qquad (24)$$

Используем RBF-сеть для аппроксимации неизвестной вектор-функции $$\mathbf{g}_2\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5\right) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \mathbf{W}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_3, \qquad (25)$$ где $\boldsymbol{\varepsilon}_3 \in R^{n\times 1}$ – ошибка аппроксимации; $\mathbf{W}_3^{\mathrm{T}} \in R^{n\times h}$ - неизвестная матрица весов; $\boldsymbol{\varphi}_3 \in R^{h\times 1}$ – вектор известных базисных функций.

Тогда (24) с учетом (25) имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{z}_5 + \boldsymbol{\alpha}_4 + \mathbf{W}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_3. \qquad (26)$$

Пусть $\hat{\mathbf{W}}_3$ – оценка $\mathbf{W}_3$; $\tilde{\mathbf{W}}_3 = \mathbf{W}_3 - \hat{\mathbf{W}}_3$ – ошибка оценивания. Выберем $V_4 = V_{3a} + 0.5\mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_4$ и вычислим ее производную с учетом (23) и (26):

$$\dot{V}_4 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \\ + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right) + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{z}_5 + \boldsymbol{\alpha}_4 + \mathbf{W}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_3\right).$$

Выберем $\boldsymbol{\alpha}_4 = -\mathbf{k}_4\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 - \hat{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_3$, $\mathbf{k}_4 > 0 \in R^{n\times n}$. (27) Тогда производная $\dot{V}_4$ примет вид (28)

$$\dot{V}_4 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_4\mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \\ + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right) + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\left(\tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_3\right).$$

Введем функцию Ляпунова $V_{4a} = V_4 + \operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_3^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_3\right)$ и, учитывая (28), найдем ее производную (29)

$$\dot{V}_{4a} = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_4\mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right) + \operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_3\mathbf{z}_4^{\mathrm{T}} - \tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_3^{-1}\dot{\hat{\mathbf{W}}}_3\right).$$

Тогда адаптивный робастный алгоритм настройки будет $$\dot{\hat{\mathbf{W}}}_3 = \boldsymbol{\Gamma}_3\left(\boldsymbol{\varphi}_3\mathbf{z}_4^{\mathrm{T}} - \eta\|\xi\|\hat{\mathbf{W}}_3\right), \qquad (30)$$

где $\xi = \left[\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \in R^{5n\times 1}$; $\eta > 0.$

Подставляя (30) в (29), получим (31)

$$\dot{V}_{4a} = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_4\mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_3\right).$$

ШАГ 5. С учетом выражений (2) имеем

$$\dot{\mathbf{z}}_5 = \mathbf{g}_3\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{u}\right) + \mathbf{B}_0\mathbf{u} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_4, \qquad (32)$$

Используем RBF-сеть для аппроксимации неизвестной вектор-функции $$\mathbf{g}_3\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{u}\right) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_4 = \mathbf{W}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_4 + \boldsymbol{\varepsilon}_4, \qquad (33)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_4 \in R^{n\times 1}$ – ошибка аппроксимации; $\mathbf{W}_4^{\mathrm{T}} \in R^{n\times p}$ – неизвестная матрица весов; $\boldsymbol{\varphi}_4 \in R^{p\times 1}$ – вектор известных базисных функций.

Тогда получаем $$\dot{\mathbf{z}}_5 = \mathbf{W}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_4 + \boldsymbol{\varepsilon}_4 + \mathbf{B}_0\mathbf{u}. \qquad (34)$$

Пусть $\hat{\mathbf{W}}_4$ – оценка $\mathbf{W}_4$; $\tilde{\mathbf{W}}_4 = \mathbf{W}_4 - \hat{\mathbf{W}}_4$ – ошибка оценивания. Выберем функцию $V_5 = V_{4a} + 0.5\mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_5$ и вычислим ее производную с учетом (31) и (34):

$$\dot{V}_5 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_4\mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right) + \\ \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_3\right) + \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{W}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_4 + \boldsymbol{\varepsilon}_4 + \mathbf{B}_0\mathbf{u}\right).$$

Выберем финальный закон управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_0^{-1}\left(-\mathbf{k}_5\mathbf{z}_5 - \mathbf{z}_4 - \hat{\mathbf{W}}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_4\right), \qquad (35)$$

где $\mathbf{k}_5 > 0 \in R^{n\times n}$. Тогда производная $\dot{V}_5$ будет

$$\dot{V}_5 = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_4\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_5\mathbf{z}_5 \\ + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right) \\ + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_3\right) + \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\left(\tilde{\mathbf{W}}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_4 + \boldsymbol{\varepsilon}_4\right). \qquad (36)$$

Введем в рассмотрение следующую функцию Ляпунова $V_{5a} = V_5 + \operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_4^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_4\right)$ и учитывая (36), найдем ее производную (37)

$$\dot{V}_{5a} = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_4\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_5\mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_4 + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right) \\ + \eta\|\xi\|\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_3\right) + \operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_4\mathbf{z}_5^{\mathrm{T}} - \tilde{\mathbf{W}}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_4^{-1}\dot{\hat{\mathbf{W}}}_4\right).$$

Тогда адаптивный робастный алгоритм настройки:

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}}_4 = \mathbf{\Gamma}_4 \left(\boldsymbol{\varphi}_4 \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}} - \eta \|\xi\| \hat{\mathbf{W}}_4 \right), \qquad (38)$$

где $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}} \right] \in R^{5n\times 1}$; $\eta > 0$.

Подставляя (38) в (37), получим (39)

$$\dot{V}_{5a} = -\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_3\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_4\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_5\mathbf{z}_5 +$$
$$+\mathbf{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mathbf{z}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \mathbf{z}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_4 + \eta\|\xi\|\,\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_1\right) +$$
$$+\eta\|\xi\|\,\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_2\right) + \eta\|\xi\|\,\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_3^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_3\right) + \eta\|\xi\|\,\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}_4^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_4\right).$$

Перепишем (39) в следующем виде:

$$\dot{V}_{5a} = -\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} + \eta\|\xi\|\,\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}\right), \qquad (40)$$

где $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{k}_2 & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{k}_3 & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{k}_4 & \mathbf{O}_{n\times n} \\ \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{k}_5 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n\times 1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_4 \end{bmatrix}$;

$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{O}_{m\times n} & \mathbf{O}_{m\times n} & \mathbf{O}_{m\times n} \\ \mathbf{O}_{k\times n} & \mathbf{W}_2 & \mathbf{O}_{k\times n} & \mathbf{O}_{k\times n} \\ \mathbf{O}_{h\times n} & \mathbf{O}_{h\times n} & \mathbf{W}_3 & \mathbf{O}_{h\times n} \\ \mathbf{O}_{p\times n} & \mathbf{O}_{p\times n} & \mathbf{O}_{p\times n} & \mathbf{W}_4 \end{bmatrix}$; $\hat{\mathbf{W}}$ – оценка $\mathbf{W}$;

$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}$ – ошибка оценивания.

Из (40) нетрудно получить неравенство вида

$$\dot{V}_{5a} \le -\|\xi\| \left[\lambda_{\min}(\mathbf{K})\|\xi\| + \frac{\eta}{2}\|\tilde{\mathbf{W}}\|_F^2 - \left(\varepsilon_N + \frac{\eta}{2}W_M^2 \right) \right].$$

Видно, что $\dot{V}_{5a}\left(\xi, \tilde{\mathbf{W}}\right) < 0$ вне компактного множества

$$\left\{ \left(\xi,\ \tilde{\mathbf{W}}\right) \mid \lambda_{\min}(\mathbf{K})\|\xi\| + \frac{\eta}{2}\|\tilde{\mathbf{W}}\|_F^2 \le \left(\varepsilon_N + \frac{\eta}{2}W_M^2 \right) \right\},$$

вследствие чего все сигналы ограничены и переменные ξ, $\tilde{\mathbf{W}}$ сходятся к инвариантному множеству, радиус которого может быть сделан произвольно малым за счет выбора параметров закона управления [15]. Кроме того, переменная $\|\xi\|$ или ошибка слежения $\mathbf{z}_1$ можно сделать сколь угодно малой путем увеличения коэффициента $\lambda_{\min}(\mathbf{K})$, количества нейронов и уменьшения значения η.

IV. Заключение

В статье решается задача синтеза нейросетевого адаптивного робастного управления многостепенным упругим электромеханическим роботом-манипулятором, функционирующим в условиях несогласованных неопределенностей, обусловленных вариацией параметров объекта. Построена полная нелинейная математическая модель четырехзвенного манипулятора, включающая описание упругости, люфта в сочленениях, электромагнитной динамики в двигателях постоянного тока и трехконтурное подчиненное управление. Адаптивное робастное управление синтезируется на основе модифицированного (упрощенного) метода обхода интегратора. Нейронная сеть используется для упрощения процедуры синтеза и снижения вычислительной сложности. Робастная устойчивость разработанной системы доказана методом функций Ляпунова.

Список литературы

[1] Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. Nonlinear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1999.

[2] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.V. Adaptive Nonlinear Control without Overparametrization /Systems and Control Letters. 1992. Vol.19. P.177-185.

[3] S. Lin, A.A. Goldenberg. Neural-network control of mobile manipulators // IEEE Trans. Neural Netw. 2001. Vol. 12, No. 5. P. 1121–1133.

[4] L. Wang, T. Chai, C. Yang. Neural-network-based contouring control for robotic manipulators in operational space // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2012. Vol. 20, No. 4. P. 1073–1080.

[5] B. Xu, C. Yang, Z. Shi, Reinforcement learning output feedback NN control using deterministic learning technique // IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst. 2014. Vol. 25, No. 3, P. 635–641.

[6] Y.-J. Liu, L. Tang, S. Tong, C. L. P. Chen. Adaptive NN controller design for a class of nonlinear MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst. 2015. Vol. 26, No. 5, P. 1007–1018.

[7] Zhao, Haibo, and Chengguang Wang. "RBF NN-Based Backstepping Adaptive Control for a Class of Nonlinear Systems." In MATEC Web of Conferences, vol. 214, p. 03005. EDP Sciences, 2018.

[8] Wang, Chao. "Adaptive RBF neural network backstepping control for two-link robot manipulators." In Journal of Physics: Conference Series, vol. 2283, no. 1, p. 012006. IOP Publishing, 2022.

[9] S.G. Shuzhi, C.C. Hang, L.C. Woon. Adaptive neural network control of robot manipulators in task space // IEEE Trans. Ind. Electron. 1997. Vol. 44. P. 746–752.

[10] L. Min-Jung, C. Young-Kiu. An adaptive neurocontroller using RBFN for robot manipulators // IEEE Trans. Ind. Electron. 2004. Vol. 51. P. 711–717.

[11] He W., Chen Y., Yin Z. Adaptive Neural Network control of an Uncertain Robot with Full – State Constraints // IEEE Transactions on Cybernetics. 2016. Vol 46, No 3. P. 620-629.

[12] C. Liu, Z. Zhao, G. Wen. Adaptive neural network control with optimal number of hidden nodes for trajectory tracking of robot manipulators // Neurocomputing. 2019. Vol. 350. P. 136–145.

[13] Шелудько В.Н., Путов В.В., Кузнецов А.А., Нгуен З.Х. Адаптивное робастное управление многостепенным механическим объектом с применением нейронных сетей. XIV Всероссийское совещание по проблемам управления. Сборник научных трудов. Москва, 2024. С. 486-490.

[14] Путов В.В., Шелудько В.Н., Нгуен Дык Фу, Чу Чонг Шы Адаптивные электромеханические системы управления многозвенными манипуляционными роботами с упругими свойствами // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». СПб.: 2019. Вып. 9. С. 84-96.

[15] Khalil, Hassan K., and Jessy W. Grizzle. Nonlinear systems. Vol. 3. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 2002.