

# Обоснование применимости контрольных карт Шухарта для статистического контроля процесса интенсивности видеопотока

А. А. Ченский

Санкт-Петербургский государственный университет  
телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

chenskii.aa@sut.ru

А. А. Березкин

Санкт-Петербургский государственный университет  
телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

berezkin.aa@sut.ru

**Аннотация.** Одна из важнейших характеристик сетевой услуги передачи видеопотока в реальном времени – это интенсивность видеопотока. Интенсивность видеопотока отражает, насколько велики задержки между поступлением кадров видеопотока на приёмной стороне. При этом интенсивность видеопотока является стохастическим процессом. Низкая интенсивность видеопотока приводит к негативным последствиям, и её необходимо контролировать. Одним из способов контроля низкой интенсивности видеопотока являются контрольные карты Шухарта. Однако основное применение контрольных карт Шухарта – это контроль качества произведённой продукции. В настоящей работе обосновано применение контрольных карт Шухарта для статистического контроля процесса интенсивности видеопотока.

**Ключевые слова:** контрольные карты Шухарта; контрольные карты; статистической процесс; стохастический процесс; случайный процесс; статистический контроль процессом; видеопоток; интенсивность видеопотока; управление от первого лица; беспилотное воздушное судно; беспилотный летательный аппарат

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В современном мире услуга передачи видеопотока в реальном времени широко используется. Среди областей её применения можно выделить: синхронизацию данных [1]; проведение видеоконференций [2, 3]; передачу видеоданных с беспилотных систем [4–9] (в том числе как разновидность сенсорных данных [10, 11]).

К характеристикам услуги передачи видеопотока в реальном времени относятся: задержка, качество и интенсивность видеопотока. Задержка характеризует, насколько успевает устареть обстановка, которая передаётся с камеры, либо насколько велико ожидание перед синхронизацией данных.

Качество видеопотока – это среднее качество кадров видеопотока. Оно показывает степень отличия принятых кадров видеопотока от отправленных. Для измерения качества видеопотока используются, в частности, метрики объективного качества видеопотока *PSNR* [12] (peak sound-to-noise ratio – пиковое отношение сигнала к шуму), *SSIM* [12] (structural similarity – структурное сходство), а также метрики субъективного качества *LPIPS* [13] (learned perceptual image patch similarity –

обученное сходство восприятия частей изображений) и *MOS* [14] (mean opinion score – средняя оценка мнений).

Наконец, интенсивность видеопотока показывает, насколько целостная картина складывается при его просмотре. Интенсивность видеопотока может рассчитываться двумя способами: моментарным и временным.

Моментарный способ измерения интенсивности видеопотока основан на измерении моментов времени поступления кадров видеопотока на отображение. Пусть  $i$  и  $i-1$  кадры видеопотока поступили в моменты времени  $t_{i-1}$  и  $t_i$  миллисекунд соответственно. Тогда интенсивность видеопотока рассчитывается как:

$$FPS = 1000 / (t_i - t_{i-1}) \text{ (к/с)} \quad (1)$$

Временной способ измерения интенсивности видеопотока основан на измерении длительности отображения видеопотока и подсчёте количества его кадров. Пусть за время  $T$  поступило  $N$  кадров видеопотока. Тогда интенсивность видеопотока рассчитывается как:

$$FPS = N / T \text{ (к/с)}$$

Значения интенсивности видеопотока, измеренные моментарным методом, при достаточно малых флуктуациях сводится к значениям, измеренным временным методом. В настоящей работе рассматриваются значения интенсивности видеопотока, полученные моментарным способом, но результаты могут также применяться и к временному способу. Для анализа систем с ограниченным числом каналов рекомендуется использовать теорию массового обслуживания [15].

Как показано в работах [5, 7, 8], время декодирования и следовательно интенсивность видеопотока – это стохастический процесс. Низкая интенсивность видеопотока приводит к негативным последствиям. Так в области управления беспилотными системами от первого лица значительно понижаются возможности по реагированию на нештатные ситуации и повышается риск срыва задания.

При этом существуют методы компенсации низкой интенсивности видеопотока на основе предсказания [12] и интерполяции [16] кадров видеопотока. Но их применение требует определения интенсивности видеопотока. Одним из методов, предложенных в [17],

Научная статья подготовлена в рамках прикладных научных исследований СПбГУТ, регистрационный номер 1025040100166-2-2.2.4;2.2.5;2.2.6 в ЕГИСУ НИОКТР.

являются контрольные карты Шухарта. Тем не менее, основная область их применения – это контроль качества произведённой продукции. В данной работе приводится обоснование применимости контрольных карт Шухарта для контроля процесса интенсивности видеопотока.

## II. СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ ПРОЦЕССА ИНТЕНСИВНОСТИ ВИДЕОПОТОКА

Контрольные карты Шухарта были предложены Уолтером Шухартом в 1931 году как эмпирический метод контроля качества произведённой продукции в промышленности [18]. В 1991 и 1999 годах были выпущены международный [19] и российский [20] стандарты применения контрольных карт Шухарта (рис. 1 [20]). На территории Российской Федерации применение контрольных карт Шухарта осуществляется согласно ГОСТ Р 50779.42-99 «Статистические методы. Контрольные карты Шухарта» [20].

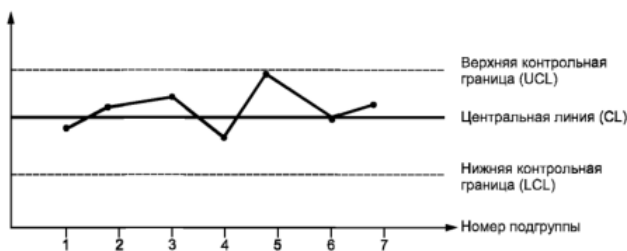


Рис. 1. Вид контрольных карт Шухарта

Каноническое применение контрольных карт Шухарта по ГОСТ состоит из трёх этапов: сбора выборки; расчёта центральной, верхней и нижней контрольных линий (UCL – upper control line; LCL – lower control line); и применение их для статистического контроля процесса.

Рассмотрим применение карт Шухарта индивидуальных значений. Пусть существует выборка  $N$  значений  $FPS_i$ . Тогда центральная линия рассчитывается как их среднее арифметическое:

$$\overline{FPS} = \sum_{i=1}^N FPS_i / N,$$

а UCL и LCL рассчитываются как:

$$LCL = \overline{FPS} - E_2 \times \overline{R},$$

$$UCL = \overline{FPS} + E_2 \times \overline{R},$$

где  $\overline{R}$  – скользящий размах:

$$\overline{R} = \overline{(FPS_i - FPS_{i-1})} = \sum_{i=2}^N (FPS_i - FPS_{i-1}) / N,$$

а  $E_2 = 3/d_2$  – коэффициент, который рассчитывается из коэффициента  $d_2$  (табл. 1). Выражение  $E_2 \times \overline{R}$  представляет собой аппроксимацию значения трёх стандартных отклонений генеральной совокупности при условии близости её распределения к нормальному.

ТАБЛИЦА I. ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА  $d_2$

$n$	$d_2$	$n$	$d_2$	$n$	$d_2$	$n$	$d_2$
2	1,128	8	2,847	14	3,407	20	3,735
3	1,693	9	2,970	15	3,472	21	3,778
4	2,059	10	3,078	16	3,532	22	3,819
5	2,326	11	3,173	17	3,588	23	3,858
6	2,534	12	3,258	18	3,640	24	3,895
7	2,704	13	0,266	19	3,689	25	3,931

Интенсивность видеопотока – стохастический процесс, о котором не делается предположений по: распределению, стационарности, эргодичности. Соответственно, для обоснования применимости контрольных карт Шухарта к данному процессу необходимо его исследовать.

## III. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В рамках осуществления услуги передачи видеопотока в реальном времени кадры видеопотока поступают с кодера на декодер. Рассмотрим многоканальную систему. Пусть на декодер поступил кадр видеопотока. Тогда, если во время декодирования одного кадра, поступил другой кадр, то другой кадр декодируется в другом канале.

Кадры видеопотока поступают с кодера с некоторой фиксированной интенсивностью видеопотока  $FPS_{CD}$ . Время декодирования кадра видеопотока  $t_{DC}$  – стохастическая величина, распределённая по Гауссову закону [7, 8]. Отметим, что  $FPS$  не может быть отрицательным и большим  $FPS_{CD}$ . Таким образом, при условии отсутствия потерь в канале информационного обмена плотность распределения длины временного интервала между поступлением соседних кадров видеопотока  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  представляет собой усечённое нормальное распределение [21]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\Delta t) = \frac{1}{\sigma(t_{DC})\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{(t_{DC} - m(t_{DC}))^2}{2\sigma^2(t_{DC})}\right), \\ \rho(\Delta t) = 0, t_{DC} \in (-\infty; 0) \cup [1000/FPS_{CD}; \infty) \end{array} \right.,$$

где  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение,  $m$  – среднее, а  $INT$  – константа, определяющаяся как [21]:

$$INT = \int_0^{1000/FPS_{CD}} \frac{1}{\sigma(t_{DC})\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{(t_{DC} - m(t_{DC}))^2}{2\sigma^2(t_{DC})}\right) dt_{DC}.$$

Пусть есть случайные величины  $x$  и  $y$ , причём  $y = f(x)$  и  $x = g(y)$ . Если известно распределение плотности случайной величины  $\rho_x(x)$ , то  $\rho_y(y)$  оценивается как [22]:

$$\rho_y(y) = \rho_x(g(y)) \times |dg(y)/dy|. \quad (2)$$

Таким образом, из формул (1) (2) следует, что распределение случайного процесса интенсивности видеопотока соответствует формуле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(FPS) = \frac{1000}{FPS^2 \sigma(t_{DC}) \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m(t_{DC})\right)^2}{2\sigma^2(t_{DC})}} \\ \rho(FPS) = 0, FPS \in (-\infty; 0) \cup [FPS_{CD}; \infty) \end{array} \right. \quad (3)$$

#### IV. АНАЛИЗ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Случайный процесс стационарен в широком смысле при выполнении трёх условий [22].

1. Математическое ожидание  $m(FPS)$  постоянно и не зависит от временного сдвига  $\tau$ . Доказательство:

$$m(FPS) = \int_{-\infty}^{\infty} FPS \times \rho(FPS; \tau) dFPS,$$

$$m(FPS) = \int_0^{FPS_{CD}} FPS \times \rho(FPS; \tau) dFPS,$$

$$m(FPS) = \frac{1000}{INT \sigma(t_{DC}) \sqrt{2\pi}} \int_0^{FPS_{CD}} \frac{dFPS}{FPS} e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m(t_{DC})\right)^2}{2\sigma^2(t_{DC})}}.$$

Данный интеграл является неберущимся. Его численное решение для определённых числовых значений параметров  $INT$ ,  $m(t_{DC})$ ,  $\sigma(t_{DC})$  возможно, например, с использованием разложения в ряд Маклорена или применения других методов численного интегрирования [23]. Также существует большое количество алгоритмических аппроксимаций обратного нормального распределения, которые рассматриваются в работе [24]. Докажем существование данного интеграла.

Достаточное условие интегрируемости функции  $f(FPS)$  на интервале  $[0; FPS_{CD}]$ : ограниченность  $f(FPS)$  на данном интервале и конечное количество точек разрыва.

Функция

$$f(FPS) = \frac{dFPS}{FPS} e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m(t_{DC})\right)^2}{2\sigma^2(t_{DC})}}$$

имеет точку разрыва при  $FPS = 0$ . Но так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{FPS} e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m(t_{DC})\right)^2}{2\sigma^2(t_{DC})}} = 0,$$

а скачок равен 0, данная точка является точкой устранимого разрыва. Таким образом, на интервале  $[0; FPS_{CD}]$   $f(FPS)$  имеет конечное количество точек разрыва.

Проанализируем поведение данной функции. Для компактности обозначим  $m(t_{DC})$  как  $m$  и  $\sigma(t_{DC})$  как  $\sigma$ .

$$d \left( \frac{1}{FPS} e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m\right)^2}{2\sigma^2}} \right) / dFPS = \frac{2e^{-\frac{(mFPS-1000)^2}{2\sigma^2 FPS^2}}}{\sigma^2 FPS^5} \times (500mFPS + \sigma^2 FPS^2 - 5 \times 10^5)$$

Найдём экстремумы помимо точки  $FPS = 0$ :

$$\sigma^2 FPS^2 + 500mFPS - 5 \times 10^5 = 0,$$

$$FPS = \frac{250 \left( \sqrt{m^2 + 8\sigma^2} \pm m \right)}{\sigma^2}.$$

В этих точках  $f(FPS)$  имеет конечные значения. Таким образом, на интервале  $[0; FPS_{CD}]$   $f(FPS)$  ограничена.

Следовательно, интеграл, как и  $m(FPS)$ , существуют, но их нахождение требует использования приближённых методов.

Кроме того, подынтегральная функция  $f(FPS)$  не зависит от временного сдвига  $\tau$ . Следовательно,  $m(FPS)$  не зависит от временного сдвига  $\tau$  (лемма 1). Что и требовалось доказать.

2. Дисперсия  $D(FPS) = \sigma^2(FPS)$  постоянна, не зависит от временного сдвига  $\tau$ . Доказательство по аналогии с  $m(FPS)$ :

$$D(FPS) = \int_0^{FPS_{CD}} (FPS - m(FPS))^2 \times \rho(FPS; \tau) dFPS,$$

$$D(FPS) = \int_0^{FPS_{CD}} FPS^2 \times \rho(FPS; \tau) dFPS -$$

$$\left( \int_0^{FPS_{CD}} FPS \times \rho(FPS; \tau) dFPS \right)^2,$$

$$D(FPS) = \frac{1000}{INT \sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{FPS_{CD}} e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m\right)^2}{2\sigma^2}} dFPS - m^2.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f_2(FPS) = e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m\right)^2}{2\sigma^2}}.$$

Её интеграл является неберущимся. В точке  $FPS = 0$  существует устранимый разрыв:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m\right)^2}{2\sigma^2}} = 0.$$

Проанализируем поведение функции  $f_2(FPS)$ .

$$d \left( e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m\right)^2}{2\sigma^2}} \right) / dFPS = \frac{m(m - 1000FPS)}{s^2 x^3} \times e^{-\frac{\left(\frac{1000}{FPS} - m\right)^2}{2\sigma^2}}.$$

Экстремумы есть в точках  $FPS = 0$  и  $FPS = m/1000$ . В этих точках  $\exists f_2(FPS) = Const$ . Следовательно, данная функция на отрезке ограничена и имеет конечное число разрывов. Из этого следует, что  $D(FPS)$  существует и конечно.

Кроме того, подынтегральная функция  $f_2(FPS)$  не зависит от временного сдвига  $\tau$ . Следовательно,  $D(FPS)$  не зависит от временного сдвига  $\tau$  (лемма 2). Что и требовалось доказать.

3. Корреляционная функция  $R(t_1, t_2)$  не зависит от отдельных значений  $t_1$  и  $t_2$ , но может зависеть от разности  $t_1 - t_2 = \tau$ . Доказательство.

Корреляционная функция  $R(t_1, t_2)$  представляет собой двухмерный центральный момент [22]:

$$R(t_1, t_2) = \overline{(FPS(t_1) - m(FPS; t_1))(FPS(t_2) - m(FPS; t_2))}.$$

Из леммы 1 следует, что:

$$R(t_1, t_2) = \overline{(FPS(t_1) - m(FPS))(FPS(t_2) - m(FPS))}.$$

Из (3) следует, что:

$$R(t_1, t_2) = R(t) = \overline{(FPS(t) - m(FPS))(FPS(t) - m(FPS))},$$

$$R(t) = R = \overline{(FPS - m(FPS))^2} = D(FPS).$$

Таким образом, корреляционная функция вырождается в дисперсию процесса (лемма 3). Из леммы 3 следует, что дисперсия не зависит ни от конкретных величин времени, ни от временного сдвига. Что и требовалось доказать.

Таким образом, стохастический процесс  $FPS$  стационарен в широком смысле. Так как его математическое ожидание и дисперсия постоянны во времени, их оценка при поступлении множества значений интенсивности видеопотока возможна.

Случайный процесс стационарен в узком смысле, если временной сдвиг  $\tau$  не влияет на плотность распределения случайного процесса. И действительно, из формулы (3) и леммы 3 следует, что

$$\forall \tau: \rho(FPS; \tau) = \rho(FPS).$$

Таким образом, стохастический процесс  $FPS$  стационарен в узком смысле.

Среднее значение стохастического процесса в каждый момент времени получаются посредством усреднения по ансамблю его реализаций. Метод контрольных карт Шухарта в свою очередь предполагает усреднение по времени. Чтобы доказать, что усреднение по времени также позволяет получить среднее значение процесса, необходимо доказать, что процесс эргодичен.

Необходимым и достаточным условием эргодичности является условие Слущкого [22]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) d\tau = 0,$$

Из леммы 3 следует, что:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R d\tau = 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T D(FPS) d\tau = 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(FPS)}{T} = 0,$$

$$0 = 0.$$

Что и требовалось доказать.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведено обоснование применимости контрольных карт Шухарта для статистического контроля стохастического процесса интенсивности видеопотока.

Стохастический процесс интенсивности видеопотока описывается обратным усечённым нормальным распределением. Так как распределение усечённое, у него существуют конечные математическое ожидание и дисперсия. Тем не менее, для их нахождения необходимости применять методы приближённого вычисления, такие как численное интегрирование, разложение в ряд Тейлора, аппроксимации распределения.

Стохастический процесс интенсивности видеопотока при условии сохранения состояния канала информационного обмена является стационарным процессом в широком и узком смысле. Корреляционная функция данного процесса вырождается в дисперсию. Кроме того, данный процесс является эргодичным.

Контрольные карты Шухарта используют усреднение по времени для оценки параметров стохастических процессов. Так как процесс стационарен, эргодичен, и только изменение состояния канала информационного обмена приводит к изменению его математического ожидания и дисперсии, контрольные карты Шухарта могут использоваться для его статистического контроля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Faiz M., Shanker U. Data synchronization in distributed client-server applications // 2016 IEEE International Conference on Engineering and Technology (ICETECH). IEEE, 2016. С. 611-616.
- [2] Kazymyr V.V., Tevkun M.V., Drozd O.P. Technologies of data transmission in video conferencing systems // Математические машины и системы. 2013. №. 4. С. 64-69.
- [3] 矢代 大祐, 小澤 健一, 高瀬 昌伸, 原田 久司. ビデオ会議システムの現状と将来展望 // 電気学会誌. 2009. Т. 129. №. 6. С. 373-376.
- [4] Березкин А.А., Ченский А.А., Киричек Р.В., Захаров А.А. Исследование методов латентного сжатия видеопотока при FPV управлении беспилотными системами // Электросвязь. 2024. №. 6. С. 46-56.
- [5] Березкин А.А., Ченский А.А., Киричек Р.В. Исследование границ интенсивности видеопотока при FPV-управлении БПЛА в режиме предсказания кадров. Часть I: модели и методы // Вестник СибГУТИ. 2024. Т. 18. №. 3. С. 115-139.
- [6] Березкин А.А., Ченский А.А., Киричек Р.В., Захаров А.А. Исследование методов квантования латентного пространства вариационного автокодировщика для кадров FPV видеопотока. Часть I // Электросвязь. 2024. №. 6. С. 58-64.

- [7] Берёзкин А.А., Ченский А.А., Киричек Р.В., Захаров А.А. Исследование конфигураций нейросетевых кодеков для адаптивной системы сжатия кадров FPV-видеопотока при управлении беспилотными системами. Часть I. Методика // *Электросвязь*. 2024. № 9. С. 42-51.
- [8] Берёзкин А.А., Ченский А.А., Киричек Р.В., Захаров А.А. Исследование конфигураций нейросетевых кодеков для адаптивной системы сжатия кадров FPV-видеопотока при управлении беспилотными системами. Часть II. Эксперимент // *Электросвязь*. 2024. № 10. С. 59-69.
- [9] Берёзкин А.А., Ченский А.А., Киричек Р.В. Нивелирование артефактов кадров видеопотока при FPV-управлении беспилотными системами // *Инфокоммуникационные технологии*. 2024. Т. 22. № 1(85). С. 7-17.
- [10] Кучерявый А.Е., Владыко А.Г., Киричек Р.В. Летящие сенсорные сети - новое приложение интернета вещей // *Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании*. 2015. С. 17-22.
- [11] Лихтциндер Б.Я., Киричек Р.В., Федотов Е.Д., Голубничная Е.Ю., Кочуров А.А. Беспроводные сенсорные сети. Москва : Научно-техническое издательство "Горячая линия-Телеком", 2020. 236 с.
- [12] Берёзкин А.А., Ченский А.А., Киричек Р.В. Сокращение задержки FPV-управления БВС через спутниковые каналы связи методом предсказания // *Электросвязь*. 2025. № 4. С. 13-24.
- [13] Zhang R., Isola P., Efros A.A., Shechtman E., Wang O. The unreasonable effectiveness of deep features as a perceptual metric // *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2018. С. 586-595.
- [14] Streijl R. C., Winkler S., Hands D. S. Mean opinion score (MOS) revisited: methods and applications, limitations and alternatives // *Multimedia Systems*. 2016. Т. 22. №. 2. С. 213-227.
- [15] Kleinrock L. *Queueing systems. Volume I: Theory*. John Wiley & Sons. 1975. 417 с.
- [16] Березкин А.А. Киричек Р.В., Кулунчаков З.В., Ченский А.А. Методы интерполяции и контроля интенсивности FPV-видеопотока // *Экономика и качество систем связи*. 2025. № 2(36). С. 92-107.
- [17] Березкин А.А., Паршин А.А., Лазарев А.А. Адаптивный контроль интенсивности видеопотока при передаче FPV-трафика беспилотных систем // *79-я научно-техническая конференция СПб НТО РЭС им. А.С. Попова, посвященная Дню радио: сборник докладов региональной конференции, Санкт-Петербург, 22-26 апреля 2024 г.* 2024. С. 158-161.
- [18] Shewhart W. A. *Economic control of quality of manufactured product*. D. Van Nostrand Company, Inc. 1931. 467 с.
- [19] ISO 8258:1991 «Shewhart control charts». 1991. 12 p.
- [20] ГОСТ Р 50779.42-99 «Статистические методы. Контрольные карты Шухарта». Госстандарт России. Москва, 1999. 36 с.
- [21] Burkardt J. The truncated normal distribution // *Department of Scientific Computing Website, Florida State University*. 2014. Т. 1. №. 35. С. 58.
- [22] Баскаков С.И. *Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов. 3-е изд. перераб. и доп.* Москва: Высшая школа, 2000. 462 с.
- [23] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. *Вычислительные методы*. 5-е изд., стер. Санкт-Петербург : Лань, 2023. 672 с.
- [24] Brophy A.L. Approximation of the inverse normal distribution function // *Behavior Research Methods, Instruments & Computers*. 1985. № 17(3). С. 415-417.